

**Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
Katedra algebry a geometrie**



ZÁKLADY DG VE 4-ROZMĚRNÉM PROSTORU

Diplomová práce

**Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2007**

**Vypracovala:
Kristýna Prusenovská
5. ročník M – Dg**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením RNDr. Lenky Juklové, Ph.D., a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny zdroje použité při psaní práce.

V Olomouci 18. března 2007

Děkuji vedoucímu diplomové práce paní RNDr. Lence Juklové, Ph.D. za pomoc a rady, které mi pomohly při zpracování zadaného tématu.

Děkuji Markétě Baranové za překlad z polštiny a své sestře Kateřině Prusenovské za překlad z angličtiny.

Děkuji Ondřeji Muchovi za technickou pomoc při úpravě diplomové práce.

Obsah

Úvod	4
1. Rozšířený čtyřrozměrný Eukleidovský prostor \overline{E}_4	5
1.1 Zavedení a vlastnosti.....	5
1.2 Pravoúhlá soustava souřadnic	7
1.3 Podprostory a jejich vzájemná poloha	9
2. Zobecnění Mongeovy projekce pro \overline{E}_4	14
2.1 Zobrazení bodu	14
2.2 Zobrazení přímky	17
2.3 Zobrazení roviny	21
2.4 Zobrazení nadroviny	26
3. Základní úlohy v Mongeově projekci v \overline{E}_4	34
3.1 Polohové úlohy	34
3.2 Metrické úlohy	45
4. Základy dalších promítání v \overline{E}_4	55
5. Čtyřrozměrná krychle.....	60
5.1 Vlastnosti	60
5.2 Řez.....	65
5.3 Oblasti vlivu.....	67
Seznam literatury a použitých zdrojů.....	75

Úvod

Cílem mé diplomové práce je seznámit čtenáře se základy promítání ve čtyřrozměrném prostoru \bar{E}_4 .

Řekla bych, že každý, kdo se kdy setkal s deskriptivní geometrií, předpokládá, že k ní neodmyslitelně patří i představivost. Většinu úloh si dokážeme představit, určíme prostorové řešení a nakonec provedeme samotnou konstrukci. Já však musím podotknout, že v souvislosti s prostorem \bar{E}_4 není má práce až tak o představách. Při psaní především využívám znalostí deskriptivní geometrie v trojrozměrném prostoru. Jejich rozšířením pak vznikají nové pojmy týkající se čtyřrozměrného prostoru.

Práce je rozdělena do pěti větších celků. První z nich seznamuje čtenáře s rozšířeným čtyřrozměrným prostorem \bar{E}_4 a připomíná jeho důležité vlastnosti.

Následující dva celky, věnované zobecnění Mongeovy projekce pro prostor \bar{E}_4 , tvoří hlavní část této práce. Obsahují především zobrazení základních útvarů a s nimi spojené polohové a metrické úlohy. Někteří z čtenářů by mohlo zajímat, proč práce neobsahuje také zobrazení těles. Bývá to přece smyslem každé projekce. V tomto případě by to však bylo téma pro další diplomovou práci.

Základy dalších promítání pro prostor \bar{E}_4 jsou součástí čtvrtého celku. Jedná se především o pouhé naznačení, jak a která zobrazení by se mohla v tomto prostoru zavést.

Poslední část mé diplomové práce je věnována čtyřrozměrné krychli. Myslím si, že čtenář jistě nepohrdne zajímavým pojmem, který je úzce spjatý s problematikou čtvrtého rozměru. Mojí povinností je ale zdůraznit, že většinu materiálů pro tuto část jsem získala prostřednictvím internetových stránek.

Důležitou součástí celé diplomové práce je řada obrázků, náčrtky a ukázky animací.

1. Rozšířený čtyřrozměrný Eukleidovský prostor \overline{E}_4

1.1 Zavedení a vlastnosti

Eukleidovským prostorem rozumíme speciální afinní prostor, v němž můžeme kromě vztahů polohových studovat i vztahy metrické.

Mějme dán čtyřrozměrný reálný afinní prostor A_4 , tj. trojici (\mathbf{A}, V_4, f) , kde \mathbf{A} je neprázdná množina, V_4 je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel a f je zobrazení množiny $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow V_4$ splňující dva axiomy:

- 1) $\forall X, Y, Z \in \mathbf{A}: f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$,
- 2) $\exists P \in \mathbf{A} \forall \mathbf{x} \in V_4 \exists! X \in \mathbf{A}: f(P, X) = \mathbf{x}$.

Definice:

Čtyřrozměrným Eukleidovským prostorem E_4 nazýváme afinní prostor (\mathbf{E}, V_4, f) , na jehož zaměření je definován skalární součin $\cdot: V_4 \times V_4 \rightarrow R^4$.

Připomeňme si také, že Eukleidovský prostor je současně metrickým prostorem, jehož metrika je definována vzdáleností dvou bodů. Tedy platí: $\forall X, Y \in \mathbf{E}: \rho(X, Y) = \|Y - X\|$.

Prostor \overline{E}_4 vybudujeme pomocí projektivního rozšíření prostoru E_4 . Mějme tedy dán Eukleidovský prostor E_4 nad tělesem reálných čísel se zaměřením V_4 . Z projektivní geometrie víme,¹ že k tomu, abychom mohli pracovat v projektivním rozšíření prostoru E_4 , je nutné definovat pro toto rozšíření jinou množinu bodů, zaměření a zobrazení než jsme využívali v prostoru E_4 .

1. Označme ω množinu všech jednorozměrných podprostorů vektorového prostoru V_4 . Množinou bodů projektivního rozšíření budeme nazývat množinu $\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cup \omega$.

¹ Sekanina, M., Boček, L., Kočandrle, M., Šedivý, J.: Geometrie II., Praha, 1988

2. Mějme množinu $\mathbf{W} = ((R \setminus \{0\}) \times E_4) \cup V_4$. Potom definujeme-li na této množině operace sčítání prvků z množiny \mathbf{W} a násobení prvků z \mathbf{W} reálným číslem pomocí vztahů:

a. $(k, X) + (h, Y) = \left(k + h, \frac{k}{k+h}X + \frac{h}{k+h}Y \right)$, pro $k + h \neq 0$

b. $(k, X) + (h, Y) = k(X - Y)$, pro $k + h = 0$

c. $(k, X) + \mathbf{u} = \left(k, X + \frac{1}{k}\mathbf{u} \right)$

d. $h(k, X) = (hk, X)$

e. $0(k, X) = \mathbf{o}$

a pomocí operací ve V_4 , je množina \mathbf{W} s těmito operacemi vektorový prostor nad tělesem reálných čísel dimenze 5. Takto vytvořený vektorový prostor W_5 bude zaměřením našeho projektivního rozšíření.

3. Označme f' zobrazení, které každému nenulovému vektoru $\mathbf{x} \in W_5$ přiřadí bod projektivního rozšíření. Tedy nechť $\mathbf{x} \in W_5$ a $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. Potom buď existuje bod $X \in E_4$ a číslo $k \in R$, $k \neq 0$ tak, že $\mathbf{x} = (k, X)$, nebo $\mathbf{x} \in V_4$. Vidíme, že každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in W_5$ určuje bod projektivního rozšíření. V prvním případě je to bod $X \in E_4$, v druhém případě je to jednorozměrný podprostor prostoru V_4 generovaný vektorem $\mathbf{x} \in V_4$. Zobrazení f' má také tu vlastnost, že dvěma různým vektorům je přiřazen stejný bod právě tehdy, když tyto vektory jsou lineárně závislé.

Definice:

Rozšířeným čtyřrozměrným prostorem \overline{E}_4 nazveme právě definované projektivní rozšíření $(\overline{\mathbf{E}}, W_5, f')$ prostoru E_4 .

Definice:

Prvky množiny $\overline{\mathbf{E}}$ se nazývají body prostoru \overline{E}_4 . Přičemž body z množiny \mathbf{E} se nazývají vlastní body prostoru \overline{E}_4 a body z množiny ω se nazývají nevlastní body prostoru \overline{E}_4 .²

² Nevlastní body prostoru \overline{E}_4 vyplňují nevlastní třírozměrný prostor, který budeme značit Ω_∞ .

1.2 Pravoúhlá soustava souřadnic

Buď $A_4 = (\mathbf{A}, V_4, f)$ afinní prostor a $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$ jeho afinní báze. Víme, že zobrazení $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}^4$, přiřazující libovolnému bodu X uspořádanou čtveřici (x_1, x_2, x_3, x_4) z \mathbb{R}^4 a splňující $X = P + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + x_4 \mathbf{e}_4$, se nazývá afinní soustava souřadnic afinního prostoru A_4 určená bází \mathcal{B} .

Definice:

Afinní báze $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$ Eukleidovského prostoru E_4 se nazývá kartézská báze, jestliže vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ tvoří ortonormální soustavu, tj. prvky báze

- jsou lineárně nezávislé, jsou proto nenulové, tj. $\|\mathbf{e}_i\| = \sqrt{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)} > 0$, pro $i = 1, \dots, 4$
- jsou navzájem ortogonální, tj. $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, pro $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, 4$
- mají normu rovnu jedné, tj. $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \|\mathbf{e}_i\|^2 = 1$, pro $i = 1, \dots, 4$.

Afinní soustava souřadnic příslušná kartézské bázi prostoru E_4 se nazývá kartézská soustava souřadnic \mathcal{L} . Bod P se nazývá počátek kartézské soustavy souřadnic, vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ báze \mathcal{B} se nazývají souřadné vektory dané soustavy souřadnic a určují směr souřadných os.

Obecný bod $X \in E_4$ lze tedy charakterizovat vzhledem k dané kartézské soustavě souřadnic čtveřicí takových reálných čísel $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, že $X = P + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + x_4 \mathbf{e}_4$. Čísla x_1, x_2, x_3, x_4 nazýváme kartézské souřadnice bodu X a píšeme $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Věta:

Báze \mathcal{B} je kartézskou bází prostoru E_4 , právě když pro vzdálenost každých dvou bodů $X, Y \in E_4$ platí:

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4], Y = [y_1, y_2, y_3, y_4] \Rightarrow \rho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (y_i - x_i)^2}.$$

Z projektivní geometrie víme,³ že k zavedení pravoúhlé soustavy souřadnic v prostoru \overline{E}_4 , je třeba definovat tzv. *homogenní souřadnice* bodů prostoru \overline{E}_4 .

Mějme $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$ bázi prostoru W_5 . Potom každý vektor $\mathbf{x} \in W_5$ můžeme psát ve tvaru

$$(1) \quad \mathbf{x} = x_0 \mathbf{v}_0 + x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 + x_4 \mathbf{v}_4,$$

kde $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$.

Definice:

Nechť $\mathbf{x} \in W_5$. Čísla x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 určená rovností (1) nazýváme *homogenní souřadnice* bodu $X \in \overline{E}_4$ v bázi $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$ a píšeme $X = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$. Vektor $\mathbf{x} \in W_5$ nazýváme *aritmetickým zástupcem* bodu $X \in \overline{E}_4$.

Protože vektor $k\mathbf{x}$, kde $k \neq 0$, je také aritmetickým zástupcem bodu X , má bod X také homogenní souřadnice $kx_0, kx_1, kx_2, kx_3, kx_4$. Homogenní souřadnice bodu $X \in \overline{E}_4$ v bázi $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$ tedy nejsou tímto bodem určeny jednoznačně, ale jsou určeny až na nenulový násobek. Zápis $X = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, stejně jako zápis $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ v prostoru E_4 , neznamená rovnost. Tento zápis samozřejmě předpokládá, že v prostoru W_5 je pevně zvolena jediná báze a že homogenní souřadnice každého bodu určujeme v této bázi.

Mějme nyní Eukleidovský prostor E_4 a v něm zvolenou kartézskou bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$.

1. Vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ jsou lineárně nezávislé i v prostoru W_5 , $(1, P) \notin V_4$, a proto také vektory $(1, P), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \in W_5$ jsou lineárně nezávislé. Protože je jich pět, tvoří bázi prostoru W_5 . Každý vektor $\mathbf{x} \in W_5$ můžeme vyjádřit v této bázi

$$(2) \quad \mathbf{x} = x_0(1, P) + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + x_4 \mathbf{e}_4.$$

³ Sekanina, M., Boček, L., Kočandrle, M., Šedivý, J.: Geometrie II., Praha, 1988

Bod $X \in \overline{E}_4$ je nevlastní právě tehdy, je-li $\mathbf{x} \in V_4$, což platí právě tehdy, je-li $x_0 = 0$. Je-li bod X vlastní, je $x_0 \neq 0$ a podle vztahů d, c (viz zavedení vektorového prostoru W_5) upravíme rovnost (2) na tvar

$$\mathbf{x} = \left(x_0, P + \frac{x_1}{x_0} \mathbf{e}_1 + \frac{x_2}{x_0} \mathbf{e}_2 + \frac{x_3}{x_0} \mathbf{e}_3 + \frac{x_4}{x_0} \mathbf{e}_4 \right). \text{ Vidíme, že v } E_4 \text{ platí}$$

$$X = P + \frac{x_1}{x_0} \mathbf{e}_1 + \frac{x_2}{x_0} \mathbf{e}_2 + \frac{x_3}{x_0} \mathbf{e}_3 + \frac{x_4}{x_0} \mathbf{e}_4, \text{ a tedy } X = \left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}, \frac{x_4}{x_0} \right]$$

v kartézské soustavě souřadnic \mathcal{L} určené bází \mathcal{B} . Z homogenních souřadnic vlastního bodu X tedy snadno určíme jeho kartézské souřadnice.

2. Nechť obráceně je dán bod X svými souřadnicemi v kartézské soustavě souřadnic \mathcal{L} : $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$. Z rovnosti

$$X = P + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + x_4 \mathbf{e}_4$$

dostaneme obráceně rovnost $(1, X) = (1, P) + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + x_4 \mathbf{e}_4$ (opět podle vztahu c). Tedy $X = (1, x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Musíme si uvědomit, že přechod od kartézských souřadnic k homogenním nebo obráceně můžeme provádět popsáním jednoduchým způsobem jen tehdy, jestliže báze prostoru W_5 a kartézská soustava souřadnic spolu souvisí uvedeným způsobem. Tj. je-li kartézská soustava souřadnic určena bází $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$, volíme v prostoru W_5 bází $\mathcal{R} = \langle (1, P); \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$.

1.3 Podprostory a jejich vzájemná poloha

Podprostory v \overline{E}_4 budeme, stejně jako rozšířený Eukleidovský prostor \overline{E}_4 , definovat pomocí projektivního rozšíření.

Definice:

Nechť E_k je podprostor Eukleidovského prostoru E_4 ($0 \leq k < 4$) a V_k buď zaměření tohoto podprostoru. Označme ω' množinu všech jednorozměrných podprostorů vektorového prostoru V_k .

Potom množinu $\bar{E}_k = E_k \cup \omega'$ nazýváme projektivní rozšíření podprostoru E_k .

Vektorový podprostor $W_{k+1} = ((R \setminus \{0\}) \times E_k) \cup V_k$ prostoru W_5 je zaměřením tohoto projektivního rozšíření \bar{E}_k podprostoru E_k .

Nyní se pokusme definovat podprostory prostoru \bar{E}_4 tak, aby projektivní rozšíření \bar{E}_k každého podprostoru E_k prostoru E_4 bylo podprostorem prostoru \bar{E}_4 . Při definici hraje důležitou roli námi již definovaný vektorový prostor W_5 .

Definice:

Bud' \bar{E}_4 rozšířený Eukleidovský prostor. Množinu \bar{E}_k bodů prostoru \bar{E}_4 nazýváme podprostorem prostoru \bar{E}_4 , jestliže existuje vektorový podprostor $W_{k+1} \subset W_5$. Zároveň platí, že $\mathbf{x} \in W_{k+1}$ právě tehdy, když $X \in \bar{E}_k$.

Definici podprostoru prostoru \bar{E}_4 můžeme zformulovat také takto: Podprostor prostoru \bar{E}_4 je množina všech bodů, jejichž aritmetičtí zástupci jsou vektory nějakého podprostoru $W_{k+1} \subset W_5$.

Je tedy zřejmé, že ke každému podprostoru W vektorového prostoru W_5 existuje podprostor E prostoru \bar{E}_4 , mající za zaměření podprostor W .

Z posledních dvou definic vyplývá následující věta:

Věta:

Nechť E_k je podprostor prostoru E_4 . Označme \bar{E}_k jeho projektivní rozšíření.

Potom množina \bar{E}_k je podprostorem dimenze k prostoru \bar{E}_4 .

Úmluva:

Nadrovinou prostoru \bar{E}_4 je třírozměrný prostor, který budeme dále nazývat pouze „prostorem“ a budeme jej značit velkými řeckými písmeny.

V rozšířeném Eukleidovském prostoru \bar{E}_4 máme tedy čtyři podprostory: bod (pro $k = 0$), přímku (pro $k = 1$), rovinu (pro $k = 2$) a prostor (pro $k = 3$).

Definice:

Říkáme, že podprostor \overline{E}_k prostoru \overline{E}_4 je nevlastní, je-li každý bod $X \in \overline{E}_k$ nevlastní bod prostoru \overline{E}_4 .⁴ Říkáme, že podprostor \overline{E}_k prostoru \overline{E}_4 je vlastní, jestliže není nevlastní.

Vzájemná poloha podprostorů

Z analytické geometrie už víme,⁵ že pokud E_k, E_h ($1 \leq k, h < n$) jsou dva libovolné podprostory téhož prostoru \overline{E}_n , pak pro jejich zaměření a množiny bodů existují právě čtyři po dvou disjunktní možnosti:

1. $(V(E_k) \subseteq V(E_h) \vee V(E_h) \subseteq V(E_k)) \wedge E_k \cap E_h = 0$ - rovnoběžné bez společných bodů
2. $(V(E_k) \subseteq V(E_h) \vee V(E_h) \subseteq V(E_k)) \wedge E_k \cap E_h \neq 0$ - incidentní
3. $(V(E_k) \not\subseteq V(E_h) \wedge V(E_h) \not\subseteq V(E_k)) \wedge E_k \cap E_h = 0$ - mimoběžné
4. $(V(E_k) \not\subseteq V(E_h) \wedge V(E_h) \not\subseteq V(E_k)) \wedge E_k \cap E_h \neq 0$ - různoběžné

Je tedy zřejmé, že při práci s podprostory prostoru \overline{E}_4 budeme rozeznávat, zda jejich průnik je či není obsažen v nevlastním prostoru Ω_∞ , a tedy budeme rozlišovat mezi rovnoběžností a různoběžností.

Průnik a spojení podprostorů prostoru \overline{E}_4 se zavádí v podstatě stejným způsobem jako v prostoru E_4 . Každý podprostor je množina bodů prostoru \overline{E}_4 , a tak použijeme stejných úvah, které umíme provést pro podprostory prostoru E_4 .

Připomeňme si jen, že pokud je průnik dvou podprostorů neprázdný, je největším z podprostorů obsažených v obou daných podprostorech. Spojení dvou podprostorů je nejmenším (ve smyslu inkluze) z podprostorů obsahujících oba dané podprostory.

⁴ Tedy prostor \overline{E}_k je podprostorem nevlastního prostoru Ω_∞ .

⁵ Jukl, M.: Analytická geometrie lineárních útvarů, skriptum UP, Olomouc, 2003

Konkrétní případy vzájemných poloh

Dvě přímky:

- totožné
- rovnoběžné-různé
- různoběžné; průnikem je jediný bod
- mimoběžné

Přímka a rovina:

- incidentní
- rovnoběžné bez společných bodů
- různoběžné; průnikem je jediný bod
- mimoběžné

Přímka a prostor:

- incidentní
- rovnoběžné bez společných bodů
- různoběžné; průnikem je jediný bod

Dvě roviny:

- totožné
- rovnoběžné-různé
- různoběžné, kdy jejich zaměření má právě jeden společný směr; průnikem je přímka
- mimoběžné s jedním směrem; jejich zaměření má právě jeden společný směr
- různoběžné; průnikem je jediný bod

Rovina a prostor:

- incidentní
- rovnoběžné bez společných bodů
- různoběžné; průnikem je přímka

Dva prostory:

- totožné
- rovnoběžné-různé
- různoběžné; průnikem je rovina

Kolmost dvou podprostorů

Definice:

Buďte E_k, E_h podprostory Eukleidovského prostoru \bar{E}_4 . Řekneme, že podprostor E_k je kolmý na podprostor E_h , jestliže platí $V(E_k) \subseteq V(E_h)^\perp \vee V(E_h)^\perp \subseteq V(E_k)$.

Podprostor E_k je tedy kolmý na E_h , jestliže jeho zaměření je obsaženo v ortogonálním doplňku zaměření podprostoru E_h , nebo jestliže tento doplněk obsahuje.

V případě, kdy $E_k \perp E_h$ a $k = 4 - h$, označuje se někdy E_k jako *totálně kolmý* podprostor na E_h .

Dvě roviny

Na závěr této kapitoly se vraťme ještě jednou k vzájemné poloze dvou rovin. Zamysleme se znovu nad rovnoběžností a kolmostí těchto dvou útvarů.

- Dva útvary v prostoru \bar{E}_4 jsou rovnoběžné, jestliže jejich průseky s Ω_∞ jsou incidentní. Víme, že dvě roviny mají s Ω_∞ společné dvě *úběžné* (nevlastní) přímky. Ty mohou být totožné, mimoběžné, a nebo ležící v téže rovině. V prvním případě budeme říkat, že roviny jsou *zcela rovnoběžné*. V posledním případě budeme nazývat roviny *polorovnoběžné*. Jedná se o roviny mimoběžné (neležící v témž prostoru), jejichž zaměření má právě jeden společný směr.
- V případě dvou kolmých rovin se nám nabízí opět dvě možnosti. Roviny budeme nazývat *totálně kolmé*, jsou-li navzájem kolmé a jejich průnikem je jediný bod. Druhou možností jsou dvě kolmé roviny, jejichž průnikem je přímka. Takové roviny budeme nazývat *polokolmé*.

2. Zobecnění Mongeovy projekce pro \overline{E}_4

V prostoru \overline{E}_4 mějme pravouhlou soustavu souřadnic (viz kap. 1.2). Nechť je určena osami x, y, z, t , procházejícími počátkem O . Víme, že kterákoliv souřadná osa je kolmá k souřadnému prostoru, určenému zbývajícími třemi osami. Dále kterákoliv souřadná rovina, určená dvěma osami, je zcela kolmá k rovině, určené zbývajícími dvěma osami. Po dvou tedy určují osy celkem $\binom{4}{2} = 6$ souřadných rovin a po třech určují celkem $\binom{4}{3} = 4$ souřadné prostory.

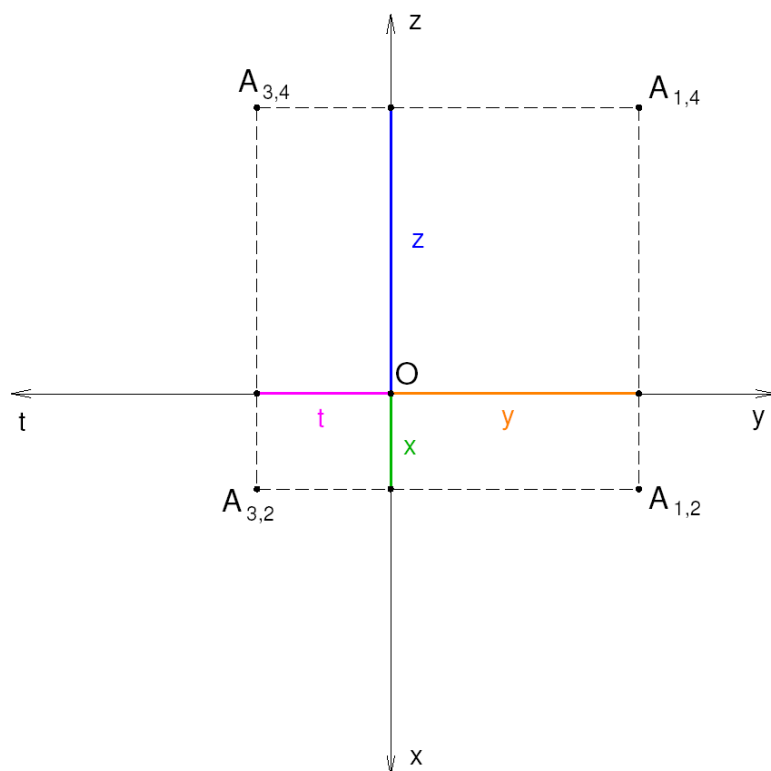
Kolmý průmět libovolného bodu A na některý souřadný prostor, např. (xyz) , je pata A_1 kolmice, spuštěné k tomuto prostoru z bodu A , která spojuje bod A s úběžným bodem T_∞ osy t . Vzdálenost $|AA_1|$ je souřadnicí t bodu A . Obdobně se určí souřadnice x, y, z , jako vzdálenosti bodu A od prostorů (yzt) , (xzt) , (xyt) .

Protože v deskriptivní geometrii užíváme raději průměten, které lze snadno přenést do nákresny, užijeme jiného způsobu promítání.

2.1 Zobrazení bodu

Mějme dva *průmětné prostory* (xyz) a (xzt) , tj. prostory, do kterých promítáme. Bod $A \in \overline{E}_4$ promítneme pravoúhle (směrem osy t) do prostoru (xyz) do bodu A_1 a pravoúhle (směrem osy y) do prostoru (xzt) do bodu A_3 . Poté prostor (xzt) otočíme kolem roviny (xz) do prostoru (xyz) tak, že osa t^+ splyne s osou y^- .

Při tomto otáčení opisuje bod A_3 kruhový oblouk v rovině, kolmé k (xz) , kolem jejího průsečíku $A_{1,3}$ s touto rovinou. Jeho poloměr je souřadnice t bodu A . Bod $A_{1,3}$ je zároveň kolmým průmětem, bodu A do roviny (xz) . Bod A_3 přejde do bodu, který v prostoru (xyz) označíme stejně – obr. 2.1.1.

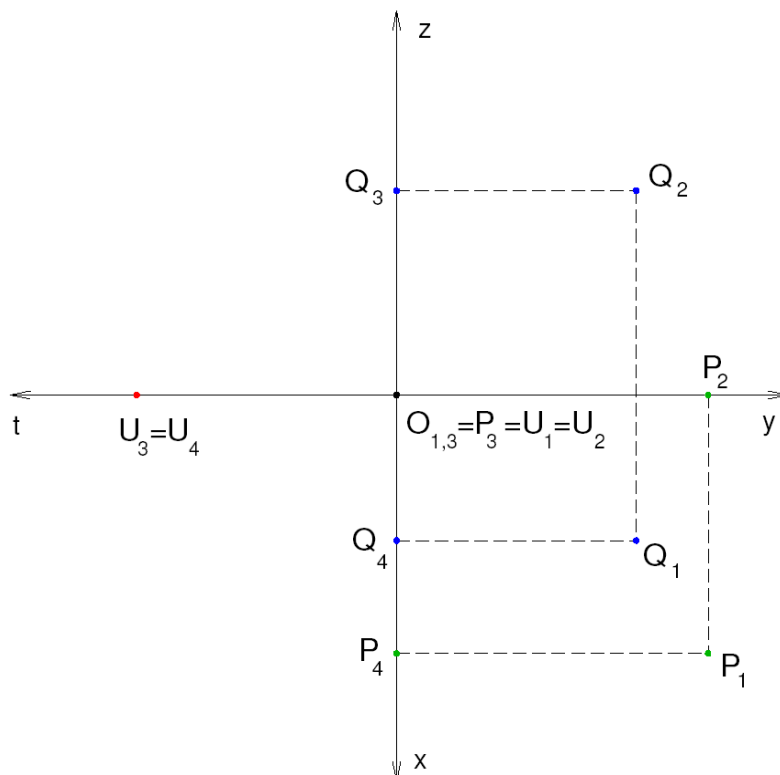


Obr. 2.1.2

Jsou-li dány naopak průměty A_1 , A_3 , je tím bod $A \in \overline{E}_4$ jednoznačně určen jako průsečík promítacích rovin $(s_{1,2}, A_1)$, $(s_{3,4}, A_3)$. Bod $A_{1,2}$ je totiž obrazem průmětu bodu A úběžné přímky $s_{1,2}$ roviny (tz) prostoru \overline{E}_4 do roviny (xy) . Bod $A_{3,4}$ je obrazem průmětu bodu A úběžné přímky $s_{3,4}$ roviny (xy) do roviny (zt) také v prostoru \overline{E}_4 .

Na obr. 2.1.2 jsou vyznačeny navíc vedlejší obrazy $A_{1,4}$, $A_{3,2}$ průmětů bodu A do roviny (yz) a (xt) . Pro zjednodušení budeme dále označovat hlavní obrazy $A_{1,2}$, $A_{3,4}$ jen A_1 , A_3 a pomocné obrazy $A_{1,4}$, $A_{3,2}$ jen A_2 , A_4 .

Podle tohoto označení jsou sestrojeny obrazy bodu $Q \in (xyz)$, jehož $t = 0$; bodu $P \in (xy)$, jehož $z = t = 0$ a bodu $U \in t$ ($x = y = z = 0$) - obr. 2.1.3.



Obr. 2.1.3

2.2 Zobrazení přímky

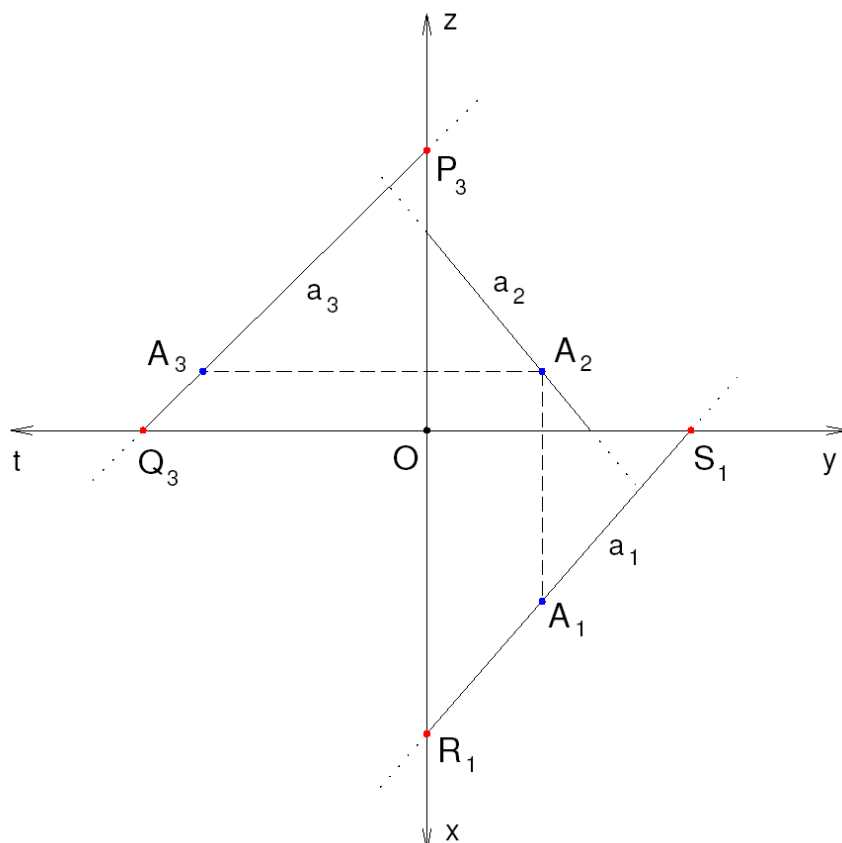
Mějme v prostoru \bar{E}_4 přímku a v obecné poloze. Prvním průmětem a_1 je průsečnice průmětny (xy) s promítacím prostorem $(s_{1,2}, a)$. Podobně třetí průmět a_3 získáme jako průsečnici průmětny (zt) s promítacím prostorem $(s_{3,4}, a)$.

Jestliže přímka a protíná některou z úběžných přímek $s_{1,2}, s_{3,4}$ (např. $s_{1,2}$), přejde promítací prostor $(s_{1,2}, a)$ v rovinu zcela kolmou k (xy) a prvním průmětem a_1 je bod. Přímka a je tedy kolmá k první průmětně (xy) .

Známe-li průměty a_1, a_3 , není tím ještě přímka a určena jednoznačně. Promítací prostory $(s_{1,2}, a_1), (s_{3,4}, a_3)$ se totiž protínají v rovině a všechny přímky této roviny mají své průměty v a_1, a_3 .

Aby přímka byla svými průměty a_1, a_3 určena jednoznačně, je třeba znát průměty dvou jejích bodů, anebo ještě další pomocný průmět. Například a_2 na průmětnu (yz) , který je průsečnicí roviny (yz) s promítacím prostorem $(s_{1,4}, a)$, kde $s_{1,4}$ je úběžná přímka roviny (xt) . Třemi průměty a_1, a_2, a_3 je přímka a v \bar{E}_4 dokonale určena jako společná přímka promítacích prostorů $(s_{1,2}, a_1), (s_{1,4}, a_2), (s_{3,4}, a_3)$.

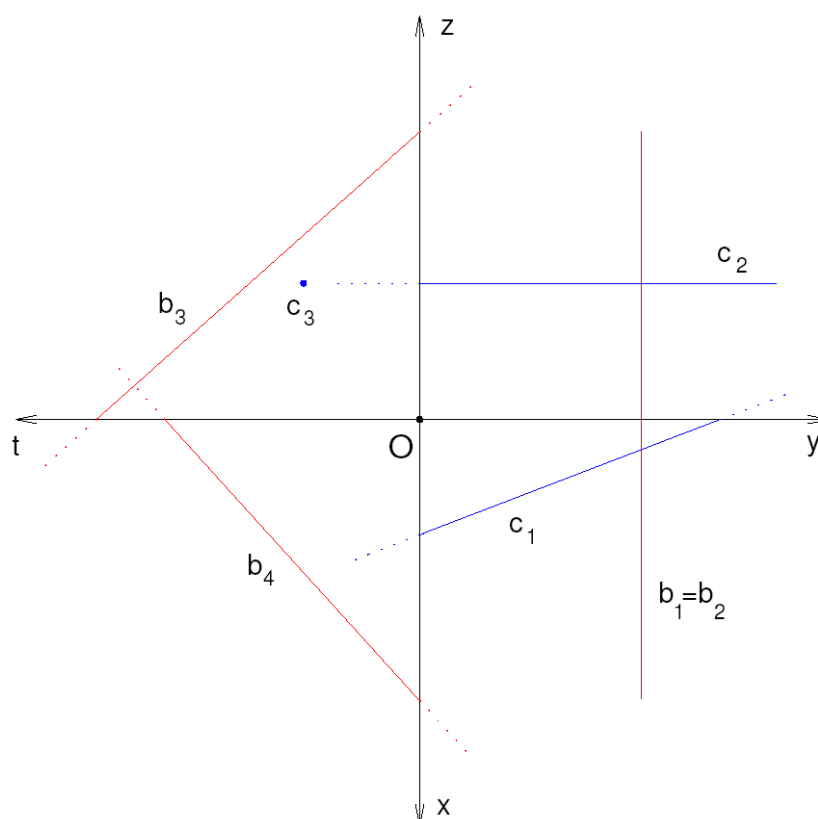
Na obr. 2.2.1 je přímka a určena svými třemi obrazy a_1, a_2, a_3 . Určení obrazů libovolného bodu $A \in a$ je také patrné z obrázku. Dále jsou zde vyznačeny vždy jen jedním obrazem *stopníky* P, Q, R, S přímky a na průmětných prostorech $(xyz), (xyt), (xzt), (yzt)$.



Obr. 2.2.1

Každá přímka může mít různé zvláštní polohy vzhledem k průmětnám a průmětným prostorům. Na obr. 2.2.2 můžeme vidět obrazy přímek b a c , z nichž první je rovnoběžná s prostorem (xzt) a tedy kolmá k ose y .

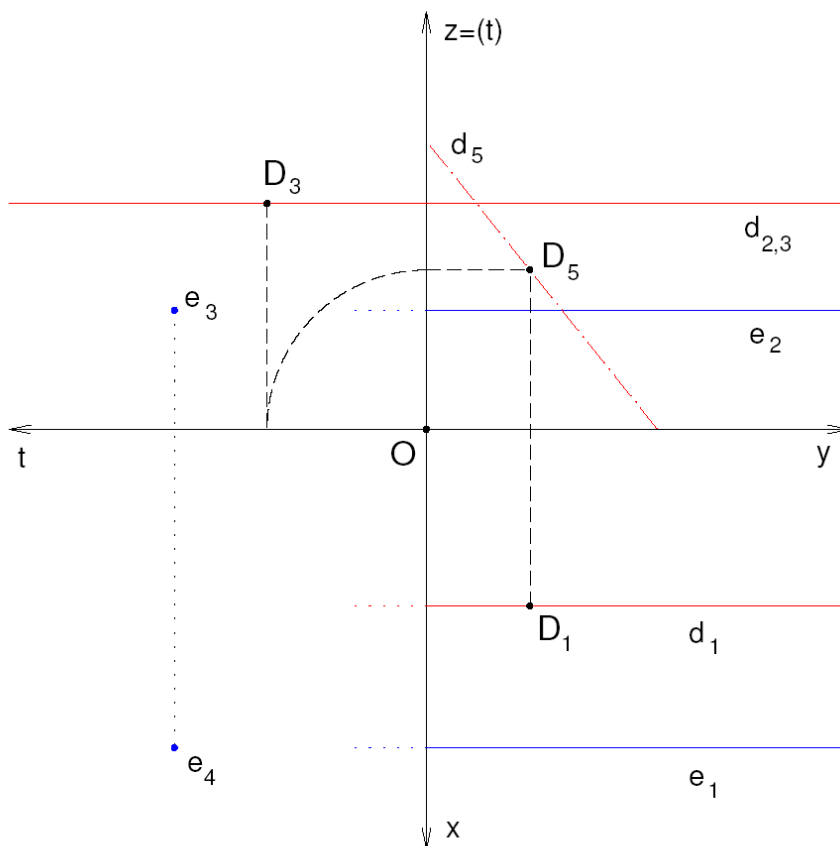
Přímka c je rovnoběžná s rovinou (xy) , tedy kolmá k (zt) . U přímky b je třeba k jejímu určení připojit ještě pomocný obraz b_4 na rovině (xt) , jelikož b_1, b_2 splývají v přímku kolmou k ose y . U přímky c je c_3 bodem.



Obr. 2.2.2

Přímka d rovnoběžná se souřadnou rovinou (yt) - obr. 2.2.3, kterou jsme nepoužili jako průmětnu, je rovnoběžná s prostory (xyt) a (yzt) . Její body mají souřadnice z a x konstantní, a platí $d_1 \parallel d_{2,3} \parallel y$. Je nutné tedy k jejímu určení připojit ještě kolmý průmět na rovinu (yt) , označený d_5 , a to tak, že t^+ ztotožníme se z^+ (v obr. označeno (t)). Obrazy libovolného bodu D této přímky jsou patrné z obrázku.

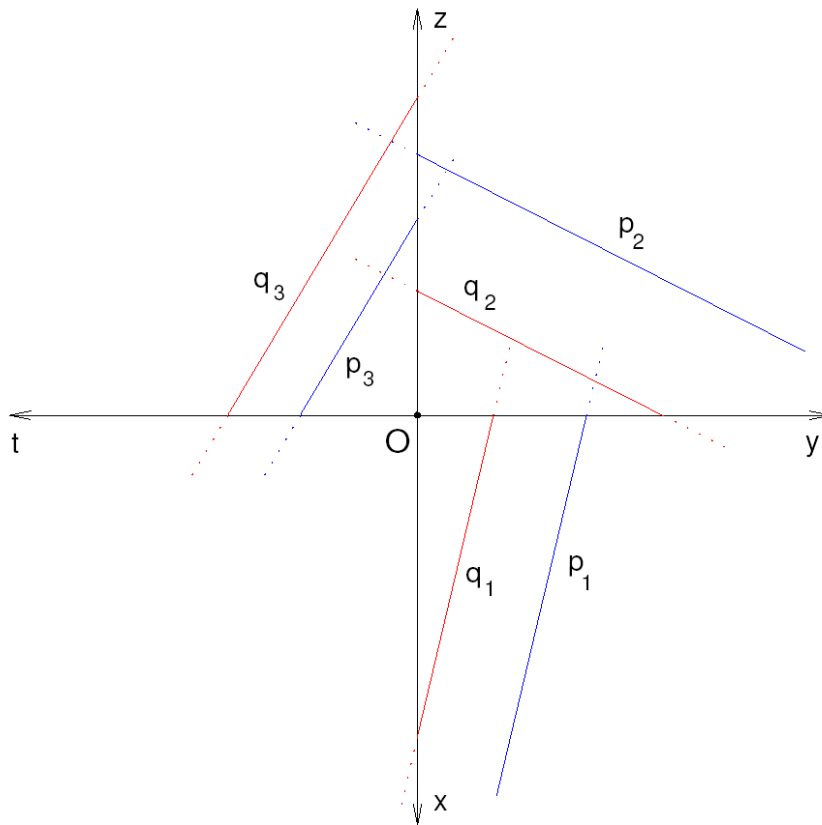
Přímka $e \parallel y$ je kolmá k prostoru (xzt) , a proto e_3 a e_4 jsou body – obr. 2.2.3.



Obr. 2.2.3

Rovnoběžné přímky $p, q \in \bar{E}_4$ mají společný bod $U_\infty \in \Omega_\infty$, a proto promítací prostory do kterékoliv souřadné roviny jsou spolu rovnoběžné a mají s Ω_∞ společnou tutěž rovinu ω_∞ . Tato rovina je určena bodem U_∞ a úběžnými body obou os, kolmých k souřadné rovině, na kterou promítáme.

Tudíž stejnojmenné průměty rovnoběžek p, q jsou také spolu rovnoběžné, a mají společný bod v průsečíku roviny ω_∞ s příslušnou průmětnou – obr. 2.2.4.



Obr. 2.2.4

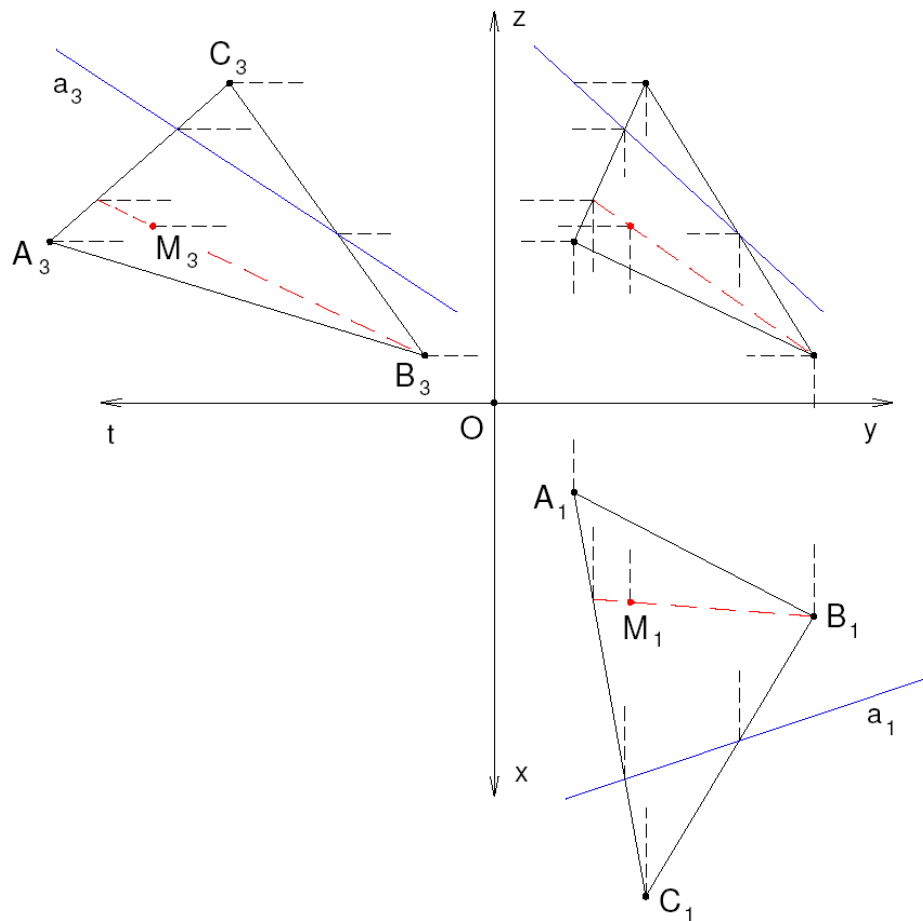
2.3 Zobrazení roviny

Zobrazení průmětů roviny prostoru \bar{E}_4 můžeme realizovat třemi způsoby:

1. Rovinu ρ prostoru \bar{E}_4 promítneme do průmětných prostorů (xyz) a (xzt) , a to kolmými promítacími prostory. Dostaneme tak průměty ρ_1 , ρ_3 , což jsou roviny procházející přímkovými stopami roviny ρ na průmětných prostorech. Navíc se tyto průměty protínají ve stopníku roviny ρ na rovině (xz) . Po otočení prostoru (xzt) do (xyz) podle obr. 2.1.1 by bylo možné roviny ρ_1 , ρ_3 určit stopami na příslušných průmětnách. Naopak také prostorové průměty ρ_1 , ρ_3 určují rovinu ρ jednoznačně. Rovina je průsekem prostorů, které prochází průměty ρ_1 , ρ_3 rovnoběžně s osou t , případně y .

2. Uvažujme bodové a paprskové pole roviny ρ a promítejme je úběžnými přímkami $s_{1,2}$, $s_{3,4}$ do průměten (xy) , (zt) . Dané pole se nám promítá do těchto průměten do dvou afinních polí a úběžná přímka r_∞ roviny ρ se promítá do úběžných přímek průměten. Afinita obou průmětů je určena třemi páry A_1A_3 , B_1B_3 , C_1C_3 odpovídajících si bodů, což odpovídá také určení roviny třemi body A, B, C .

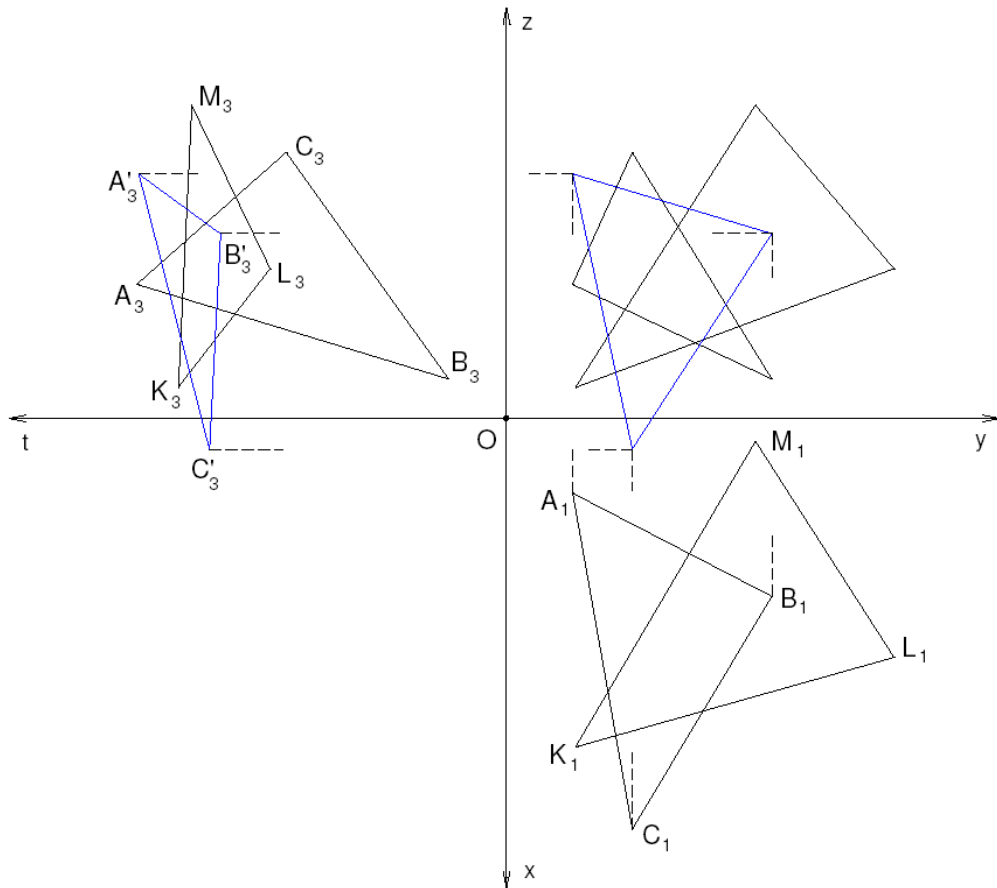
Na obr. 2.3.1 je zobrazena rovina ρ určená body A, B, C . Patrně i druhý obraz roviny ρ je afinní k hlavním obrazům. Toho lze využít k stanovení obrazů přímky $a \subset \rho$, je-li dán některý její obraz (např. a_1), anebo bodu $M \in \rho$, je-li dán jeden jeho obraz.



Obr. 2.3.1

Mějme dány dvě roviny $\rho = (A, B, C)$, $\sigma = (K, L, M)$ v obecné poloze a nechť jsou tyto roviny určeny již zmíněnými afinitami mezi hlavními obrazy - obr. 2.3.2. Pak jejich průsečík $V = \rho \cap \sigma$ má obrazy ve vlastním společném páru V_1, V_3 obou afinit. Afinity mají ještě dva páry společných odpovídajících si bodů, ale úběžné.

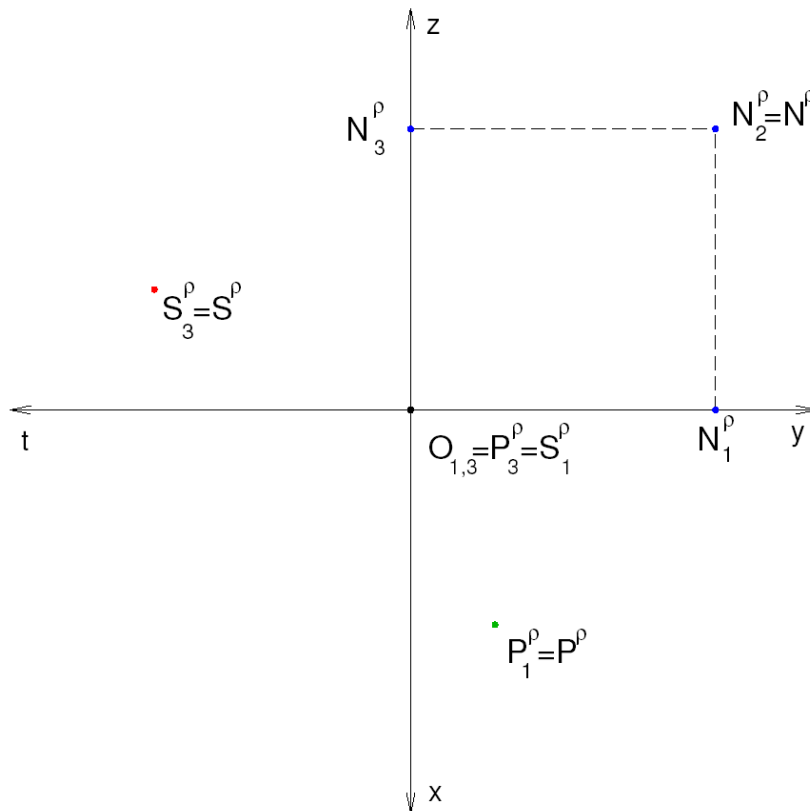
Abychom určili obrazy V_1, V_3 bodu V , stanovíme např. k obrazům A_1, B_1, C_1 bodů A, B, C třetí obrazy A'_3, B'_3, C'_3 , za předpokladu, že jsou v rovině σ . V souměrné afinitě $\mathcal{A}: A_3B_3C_3 \leftrightarrow A'_3B'_3C'_3$ je obecně jeden vlastní samodružný bod $V_3 = V'_3$, k němuž náleží též první obraz V_1 , ať jej počítáme k rovině ρ nebo σ . Získáme tedy obrazy V_1, V_3 průsečíku V .⁶



Obr. 2.3.2

⁶ Průsečík dvou rovin není v obr. 2.3.2 sestaven, neboť bude jiným způsobem řešen později jako polohová úloha.

3. Rovina ρ protíná průmětny (xy) , (yz) , (zt) , ... v bodech P^ρ , N^ρ , S^ρ , ..., které budeme nazývat *stopníky* roviny ρ . Tyto tři stopníky určují rovinu, a tedy rovina ρ je zadána podle druhého způsobu třemi svými zvláštními body, a tudíž afinitou: $P_1^\rho N_1^\rho S_1^\rho \leftrightarrow P_3^\rho N_3^\rho S_3^\rho$ - obr. 2.3.3.

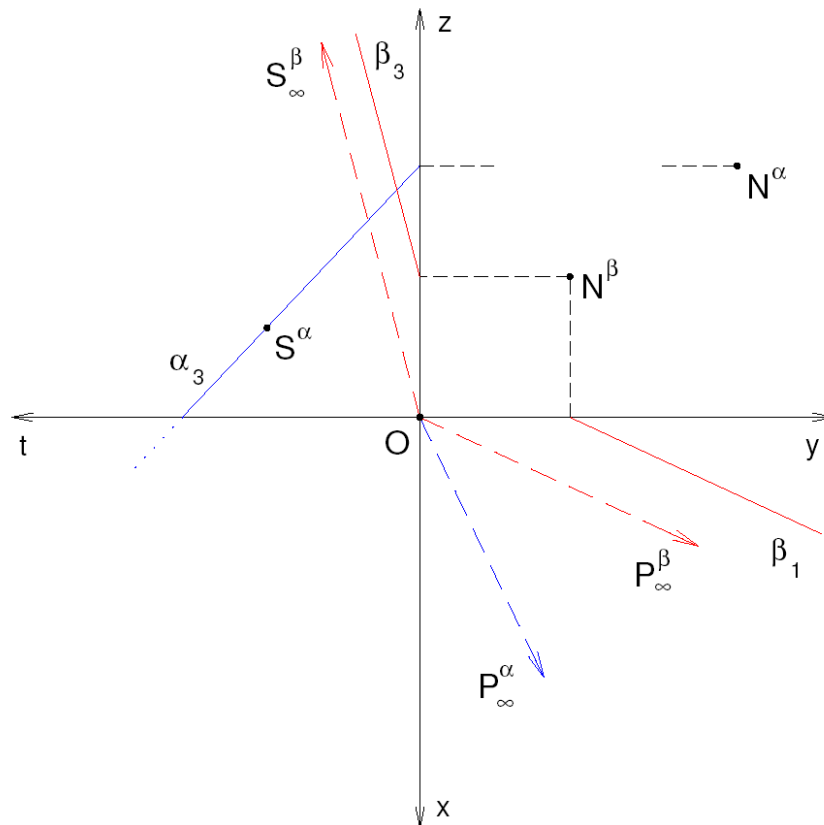


Obr. 2.3.3

Je-li dána rovina ρ obrazy tří svých bodů A , B , C (obr. 2.3.1), dostaneme stopníky P^ρ , S^ρ jako body roviny ρ , pro které platí $P_3^\rho = S_1^\rho = O_{1,3}$.

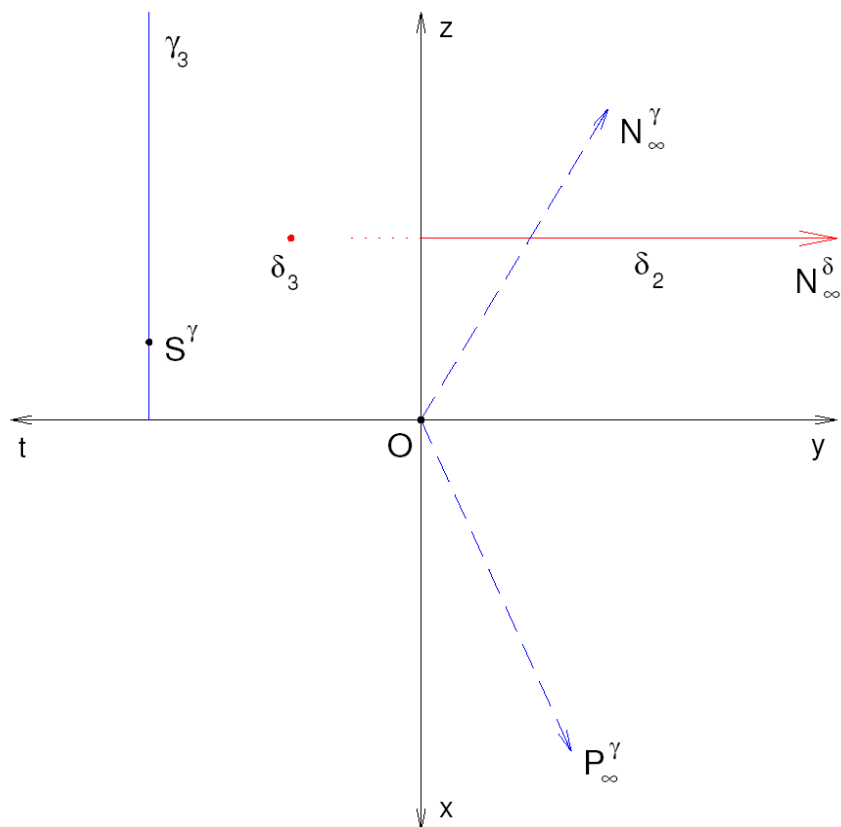
Rovina může mít různé zvláštní polohy vzhledem k průmětnám a průmětným prostorům. Na obr. 2.3.4 jsou vyznačeny stopníky roviny α polorovnoběžné s rovinou (xy) a roviny β polokolmé a polorovnoběžné s toutéž rovinou (xy) . Tudíž stopníky P^α , P^β a S^β jsou úběžné.

Navíc pokud je rovina polokolmá k některé průmětně, pak příslušné promítací roviny všech jejích bodů jsou obsaženy v témž promítacím prostoru a příslušný průmět roviny je přímkou. Třetí průmět roviny α je tedy přímkou α_3 a u roviny β jsou první a třetí průmět přímkami β_1, β_3 .



Obr. 2.3.4

Na obr. 2.3.5 můžeme vidět stopníky roviny γ a δ , z nichž první je kolmá k ose t , nebo-li rovnoběžná s prostorem (xyz) , a druhá je zcela kolmá k rovině (zt) , takže δ_3 je bodem a γ_3, δ_2 jsou přímkami.

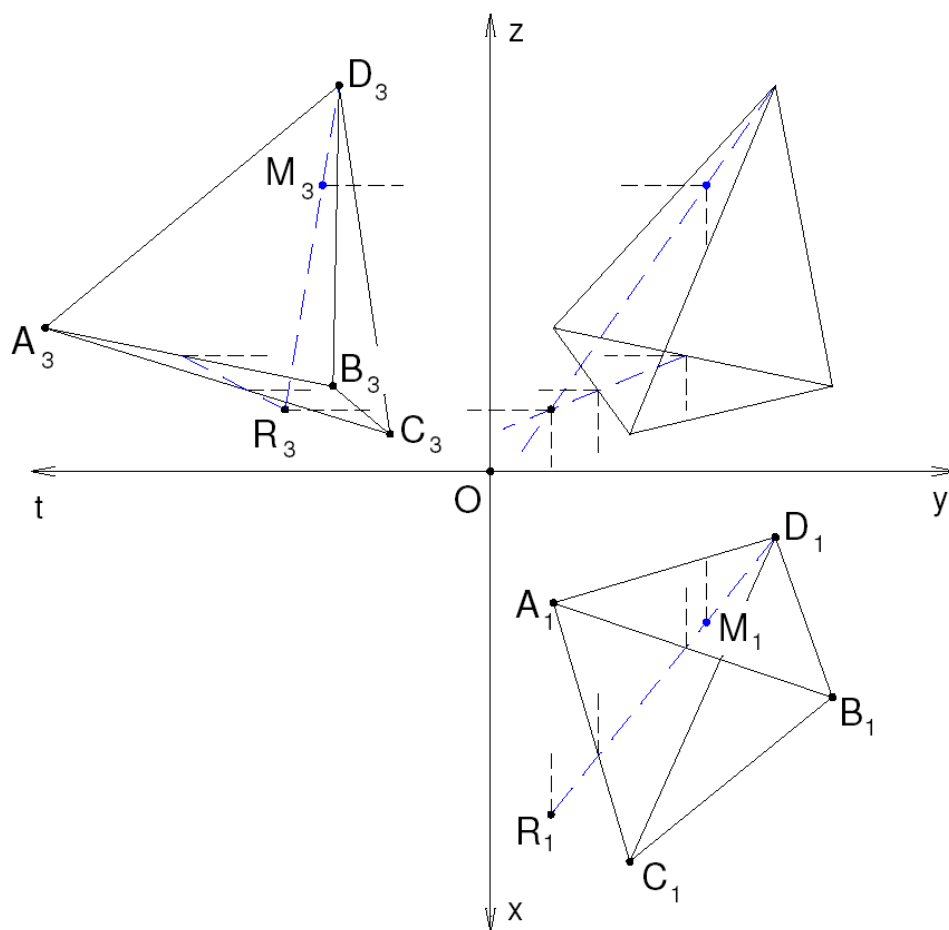


Obr. 2.3.5

2.4 Zobrazení nadroviny

Prostor Φ je určen čtyřmi svými body A, B, C, D , které neleží v téže rovině. Na nákresně to poznáme tak, že v afinitě např. $A_1B_1C_1 \leftrightarrow A_3B_3C_3$ bodu D_1 odpovídá bod, různý od D_3 - obr. 2.4.1.

Bod $M \in \Phi$ je určen např. prvním a druhým obrazem, které leží na ordinále, kolmé k ose y . Body M_1, M_2 určují průmět bodu M do průmětného prostoru (xyz) a kolmice v něm vztyčená k tomuto prostoru protíná Φ v bodě M . Abychom určili M_3 na nákresně, sestrojíme v prvním a druhém obraze průsečík $R = DM \cap ABC$. Potom odvodíme jeho obraz R_3 a na přímce R_3D_3 leží obraz M_3 bodu M .

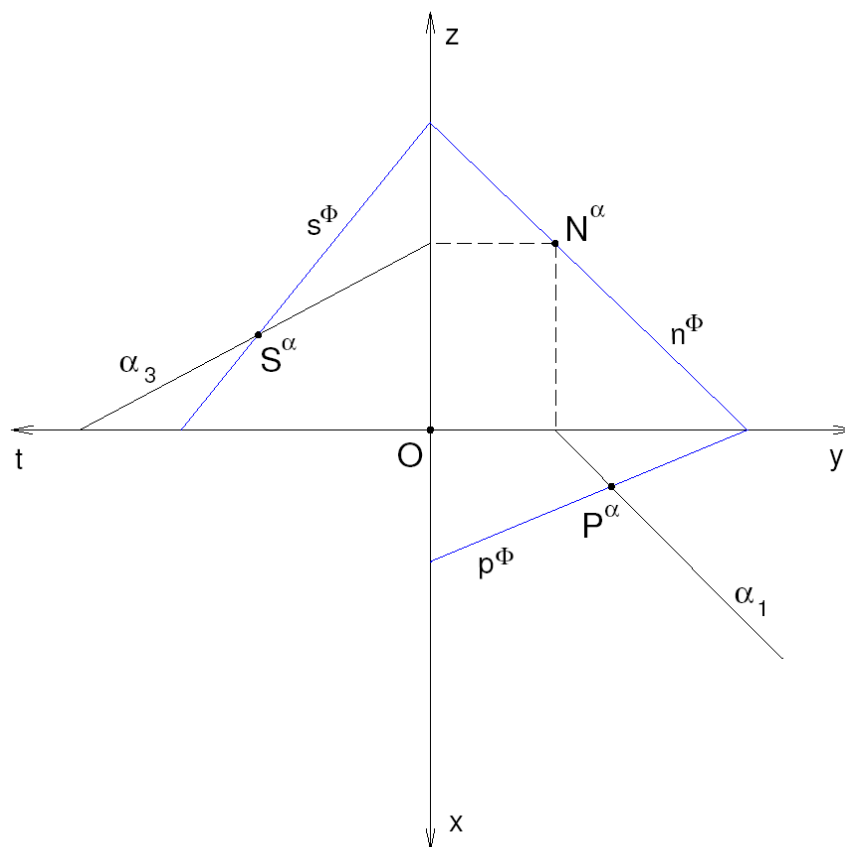


Obr. 2.4.1

Místo obecných bodů, určujících prostor Φ , lze výhodně užít průsečíků prostoru s osami x, y, z, t . Tyto body pak po dvou určují *stopy* $p^\Phi, n^\Phi, s^\Phi, \dots$ prostoru Φ na průmětnách $(xy), (yz), (zt), \dots$ - obr. 2.4.2.

Rovina $\alpha \subset \Phi$ musí mít stopníky $P^\alpha, N^\alpha, S^\alpha, \dots$ na souhlasných stopách prostoru Φ .

Je-li dán prostor čtyřmi body, stanovíme jeho stopu (např. první) tak, že sestrojíme první stopníky dvou jeho rovin a ty spojíme.



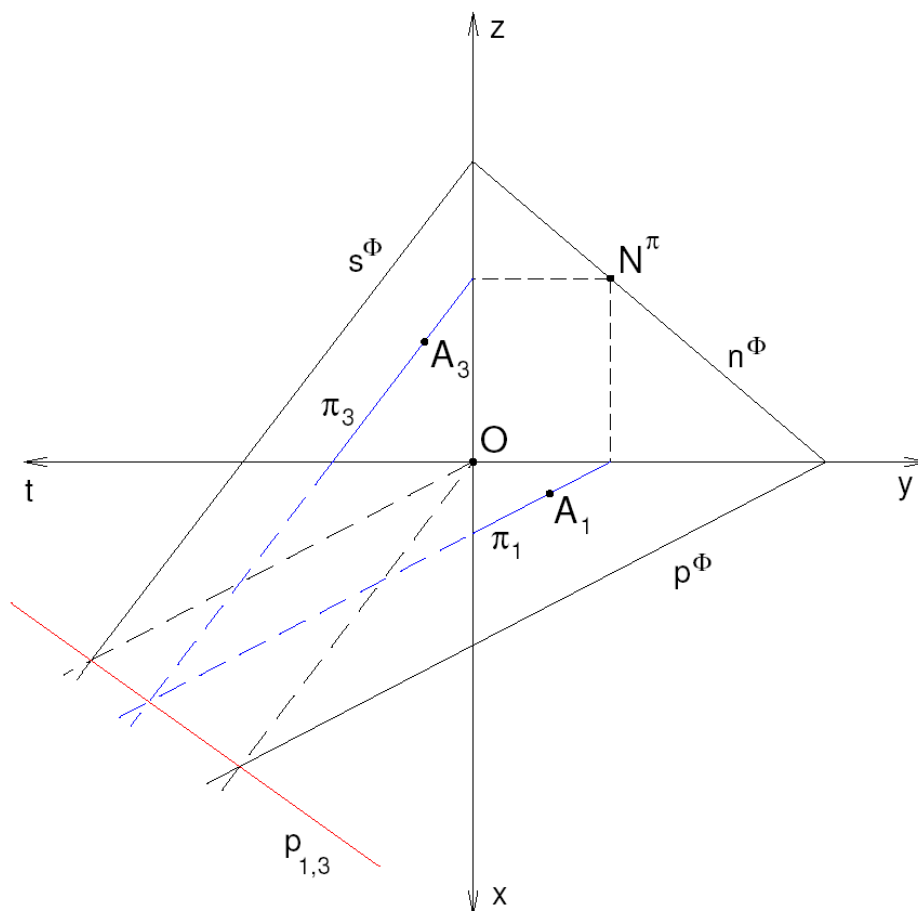
Obr. 2.4.2

Prostor může mít vzhledem k průmětnám a průmětným prostorům tyto zvláštní polohy:

- *rovnoběžný s jednou souřadnou osou* - je to vlastně prostor kolmý k prostoru, určenému zbývajícími třemi osami. Průmětem daného prostoru do tohoto průmětného prostoru je rovina.
- *rovnoběžný s jednou průmětnou*, např. (zt) - jde o prostor kolmý k průmětně, určené zbývajícími dvěma osami, tedy (xy) . Průmětem je stopa daného prostoru, ležící v (xy) .
- *rovnoběžný s jedním průmětným prostorem*, např. (xyz) - je to prostor kolmý ke čtvrté ose, tedy k ose t . Jeho průměty na tři průmětny, ve kterých leží daná osa, jsou přímky kolmé k této ose.

K zobrazení bodů obecného prostoru Φ , zadaného stopami p^Φ , n^Φ , s^Φ , lze využít tzv. *hlavních rovin* π prostoru Φ – obr. 2.4.3. Tyto roviny jsou rovnoběžné se stopami p^Φ a s^Φ , a tudíž jsou polokolmé k první a třetí průmětně. Prvním a třetím průmětem hlavní roviny π jsou tedy přímky $\pi_1 \parallel p^\Phi$ a $\pi_3 \parallel s^\Phi$, které musí procházet prvním a třetím obrazem stopníku $N^\pi \in n^\Phi$.

Prvnímu obrazu A_1 bodu $A \in \Phi$ odpovídá jako třetí obraz kterýkoliv bod na třetím obraze π_3 hlavní roviny π , jdoucí bodem A . Vzhledem k perspektivnosti osnov rovnoběžek π_1 s p^Φ a π_3 s s^Φ se odpovídající si obrazy π_1 , π_3 protínají v bodech téže osy $p_{1,3}$. Dva body této osy dostaneme nejrychleji tak, necháme-li jednou π_1 ztotožnit s p^Φ a po druhé π_3 s s^Φ , jak je vidět na obr. 2.4.3. Páry A_1A_3 obrazů bodu $A \in \Phi$ jsou vázány na ordinály π_1 , π_3 , které se protínají v bodech osy $p_{1,3}$. Body přímky $p_{1,3}$ jsou obrazy bodů prostoru Φ , jejichž dva hlavní obrazy splývají.



Obr. 2.4.3

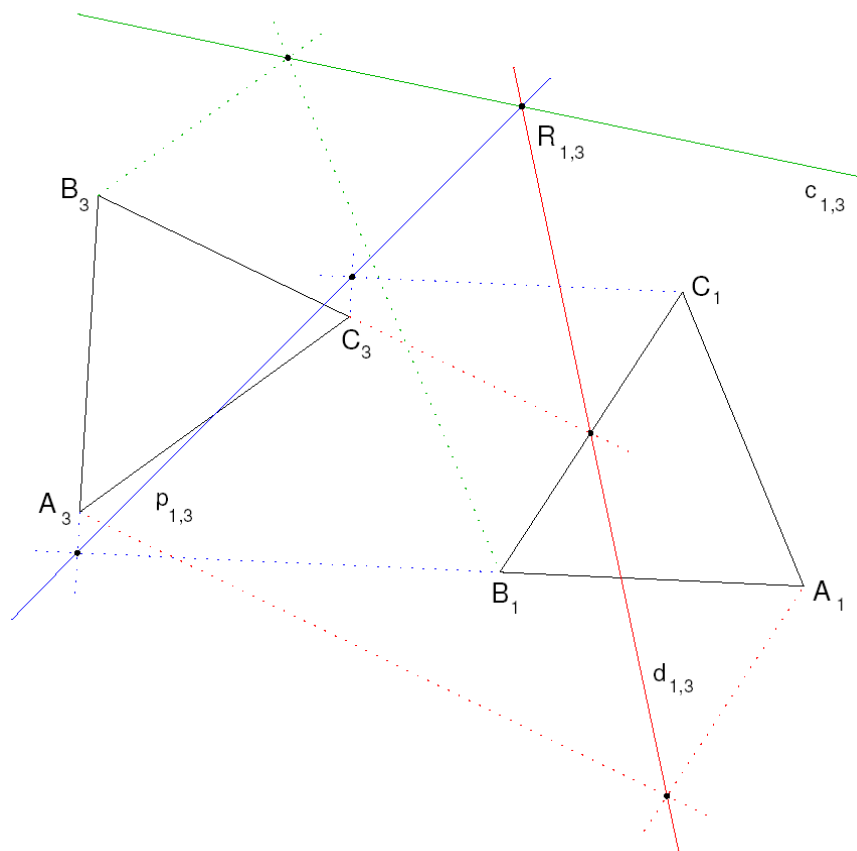
Současně jsou body přímky $p_{1,3}$ také obrazy bodů tohoto prostoru, které leží v tzv. rovině totožnosti τ prostoru \overline{E}_4 . Obecný prostor Φ protíná tuto rovinu v přímce p .

Obecná rovina ρ protíná tuto rovinu τ v jediném bodě R , jehož oba hlavní splývající obrazy jsou v samodružném vlastním bodě $R_{1,3}$ afinity, která je mezi hlavními obrazy pole roviny ρ .

Chceme-li najít obraz stopníku R na rovině τ roviny ρ zadané třemi body A, B, C - obr. 2.4.4, lze to provést tak, že proložíme rovinou ρ dva prostory Π a Δ . Potom průsečík jejich stop p, d na rovině totožnosti τ je hledaný bod R .

Nechť má prostor Π (Δ) v prvním obraze ordinály rovnoběžné s přímkou A_1B_1 (B_1C_1) a v druhém obraze s přímkou A_3B_3 (B_3C_3). Dostáváme tak v \overline{E}_4 prostorový význam konstrukce samodružného bodu v soumístných afinních polích. Osy totožnosti $p_{1,3}, d_{1,3}, \dots$ svazku prostorů, jdoucích rovinou ρ , tvoří svazek přímek o středu $R_{1,3}$. Tento svazek je navíc projektivní se svazkem ordinál, jdoucích např. bodem A_1 nebo A_3 .

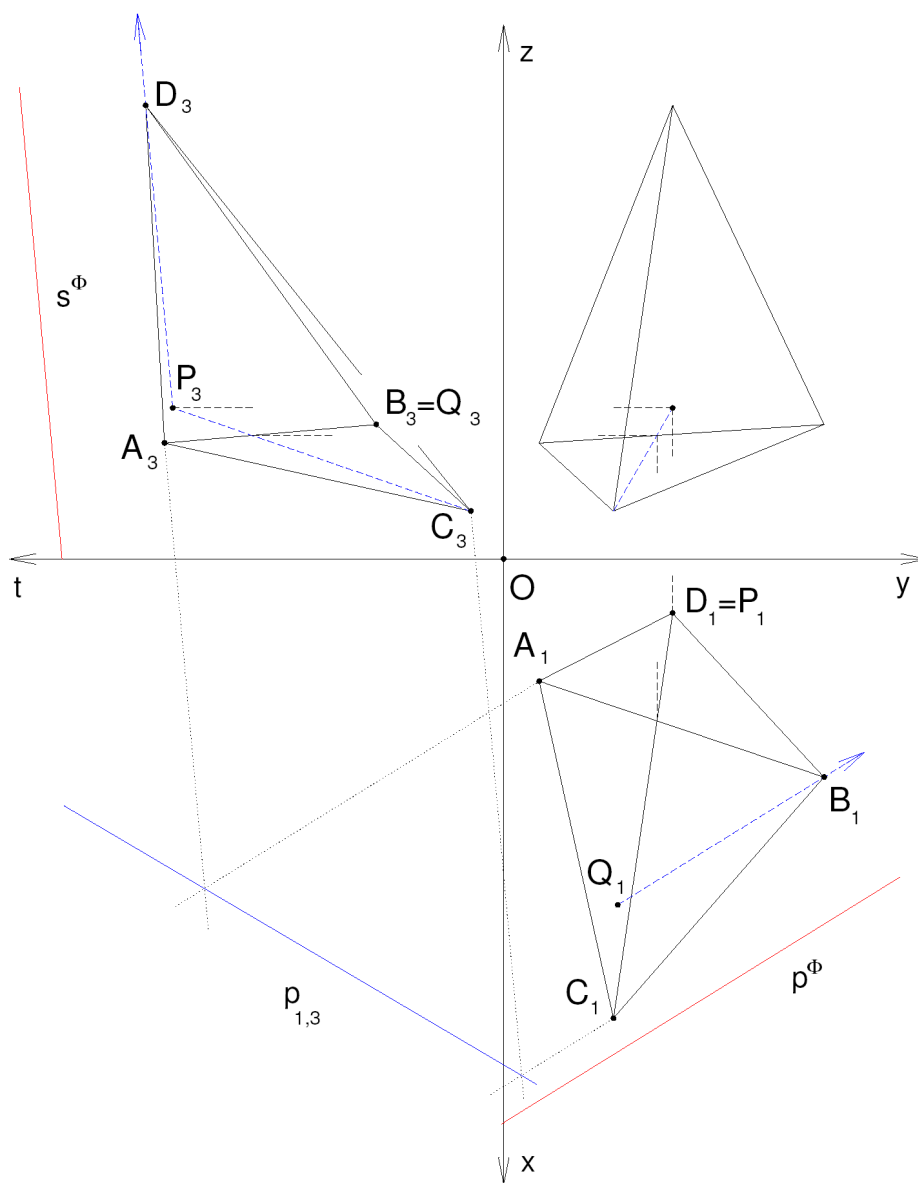
Proložíme-li tedy ještě rovinou ρ prostor Γ , jehož ordinály jsou rovnoběžné s přímkami A_1C_1 a A_3C_3 , pak svazky ordinál kolem bodů A_1, A_3 jsou promítací, neboť si přísluší jako odpovídající paprsky ordinál téhož prostoru.



Obr. 2.4.4

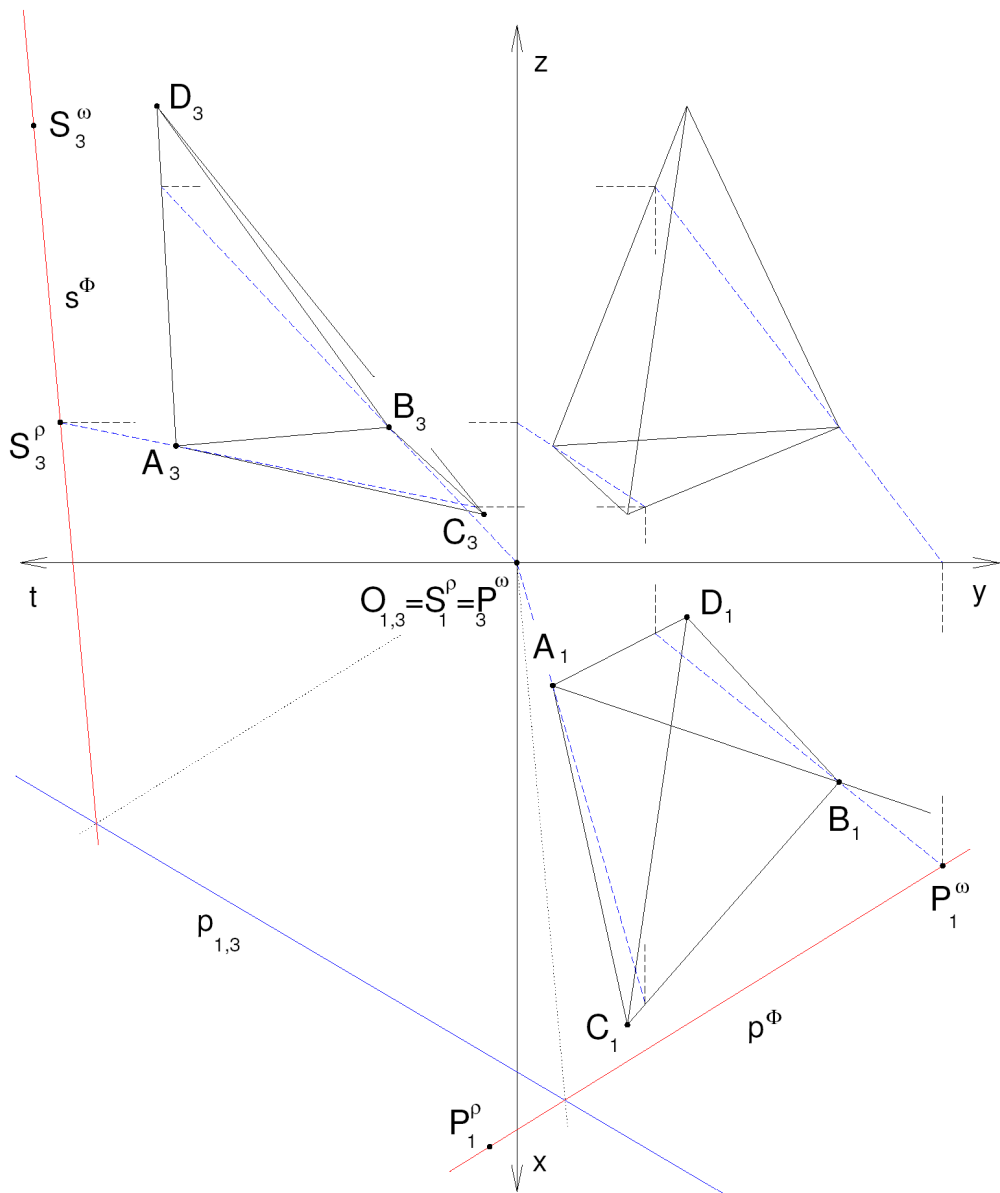
Nyní se podívejme jak se sestrojí směry ordinál v hlavních obrazech, pokud máme prostor Φ zadán čtyřmi svými obecně položenými body A, B, C, D .

1. Zobrazme si v rovině ABC bod P , jehož $P_1 = D_1$, a stanovme P_3 . Spojnice P_3D_3 je směr ordinál v třetím obraze. Podobně určíme první obraz Q_1 bodu Q roviny ADC , jehož třetí obraz $Q_3 = B_3$; Q_1B_1 je směr prvních ordinál. Z osy totožnosti $p_{1,3}$ pak snadno určíme i stopy prostoru Φ na průmětnách – obr. 2.4.5.



Obr. 2.4.5

2. Sestrojíme stopníky S^ρ , S^ω rovin $\rho = (ABC)$, $\omega = (ABD)$ na rovině (zt) , jejichž první obrazy splývají s počátkem O - obr. 2.4.6. Spojnice $S^\rho S^\omega$ nám určí stopu s^Φ . Obdobně určíme stopu p^Φ a již známým způsobem najdeme osu totožnosti $p_{1,3}$ prostoru Φ . První způsob je obecně kratší.



Obr. 2.4.6

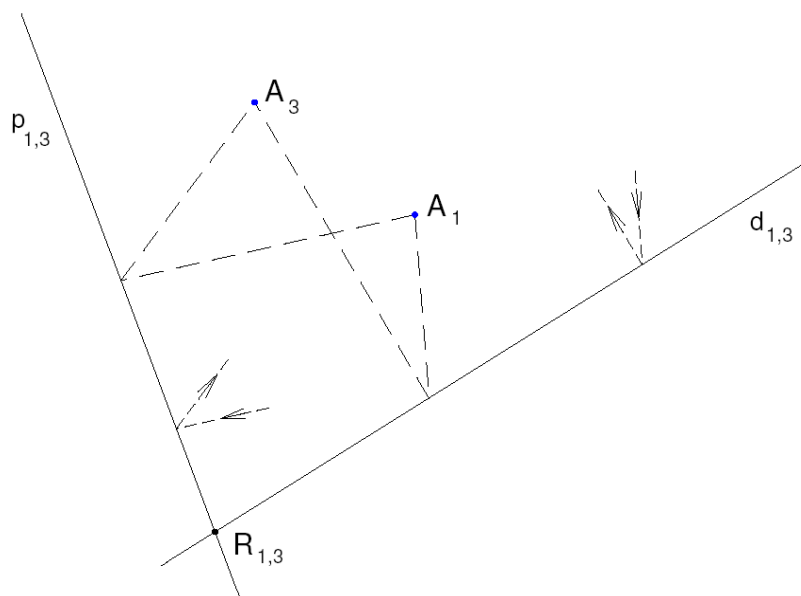
3. Základní úlohy v Mongeově projekci v \overline{E}_4

3.1 Polohové úlohy

Polohové úlohy se týkají vzájemné polohy (viz kapitola 1.3) dvou základních podprostorů prostoru \overline{E}_4 . Některé z těchto úloh můžeme řešit stejně jako v trojrozměrném prostoru, především úlohy o vzájemné poloze dvou přímek nebo přímky a roviny.⁷ Budeme se tedy nadále zabývat pouze těmi vzájemnými polohami podprostorů, které se poprvé objevují v prostoru \overline{E}_4 .

Dva prostory

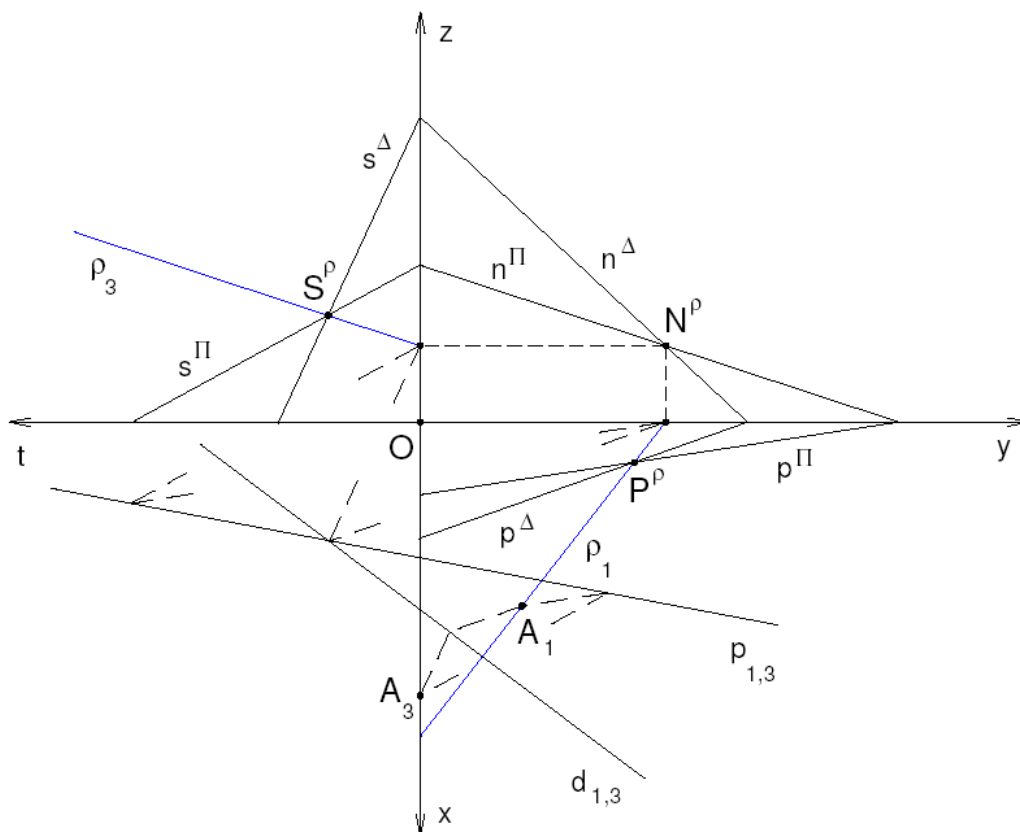
Uvažujme dva prostory Π a Δ , které jsou různé. Rovina $\rho = \Pi \cap \Delta$ se bude zobrazovat v afinitu mezi hlavními průměty. Jsou-li prostory dány osami totožnosti $p_{1,3}$, $d_{1,3}$ a směry příslušných ordinál - obr. 3.1.1, lze snadno k prvnímu obrazu A_1 bodu $A \in \rho$ sestrojiti obraz A_3 užitím ordinál obou prostorů.



Obr. 3.1.1

⁷ Urban, A.: Deskriptivní geometrie I., Praha, 1965

Pokud máme oba prostory zadané svými stopami - obr. 3.1.2, pak navíc průsečíky párů souhlasných stop jsou stopníky hledané roviny ρ .



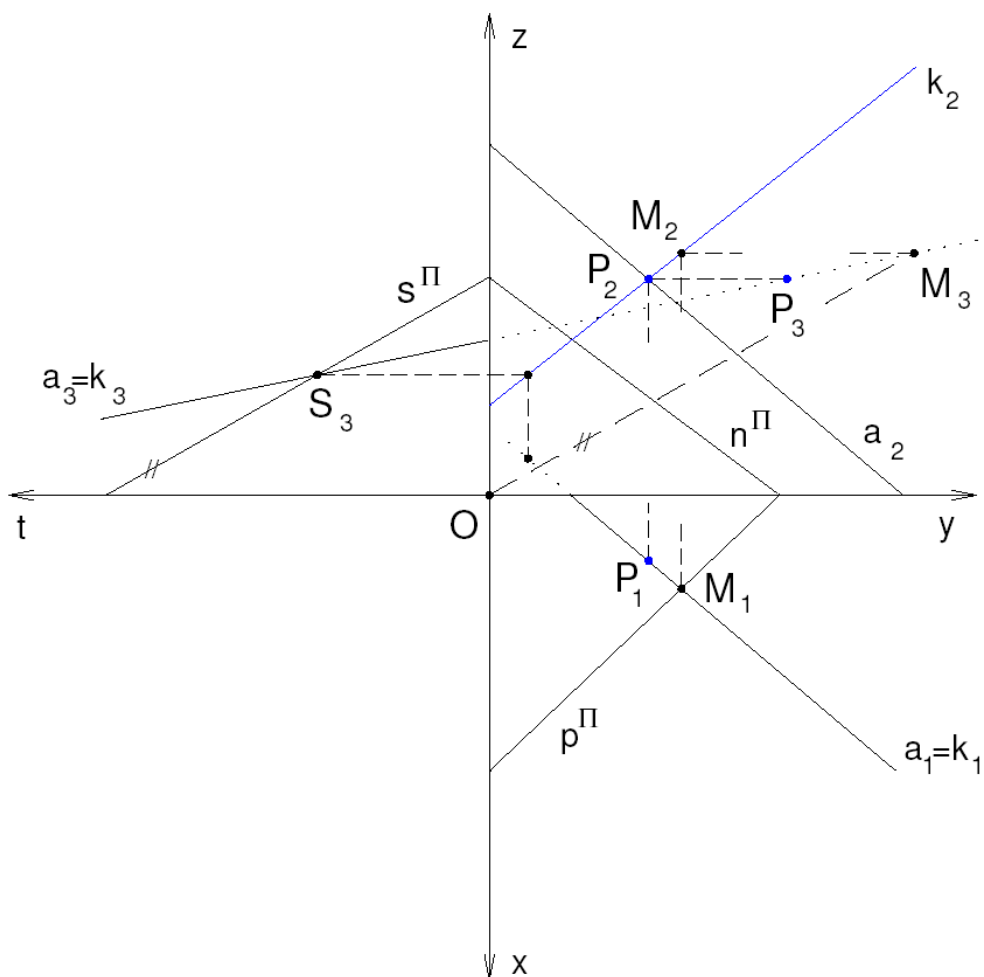
Obr. 3.1.2

Přímka a prostor

V daném prostoru lze přímku zvolit tak, že si zcela libovolně sestrojíme její první a třetí obraz, ovšem její body mají své obrazy na příslušných ordinálách.

V prostoru \bar{E}_4 protíná přímka $a = AB$ obecně k ní položený prostor Π v jediném bodě P . Tento průsečík sestrojíme např. pomocí *krycí přímky* $k \subset \Pi$, pro kterou platí $k_1 = a_1$ a $k_3 = a_3$. Přímky k , a leží v téže rovině a protínají se v hledaném bodě P .

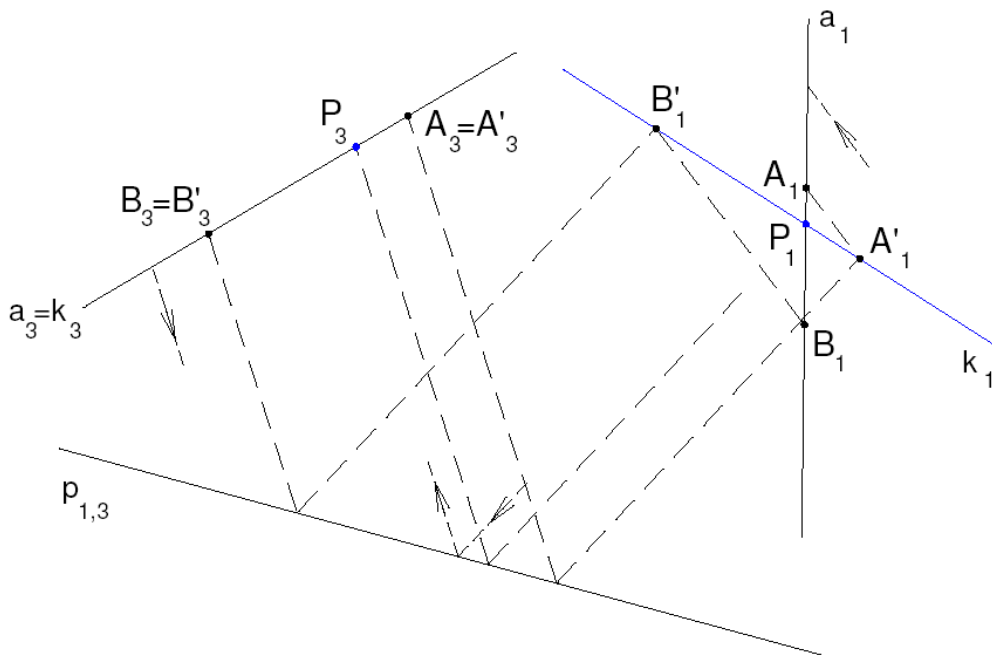
Na obr. 3.1.3 je prostor Π zadán stopami p^Π , n^Π , s^Π . Sestrojíme tedy druhý pomocný obraz k_2 přímky k . Například využitím bodů M a S , které leží na přímce k , a pro které platí $M_1 \in p^\Pi$ a $S_3 \in s^\Pi$. Pak zřejmě $P_2 = k_2 \cap a_2$ a můžeme tak sestrojiti zbývající obrazy P_1 a P_3 bodu P .



Obr. 3.1.3

Mějme prostor Π zadán směry ordinál a osou totožnosti $p_{1,3}$ - obr. 3.1.4. Přímkou a proložíme libovolný prostor Δ tak, že první ordinály jdou body A_1 , B_1 libovolně rovnoběžně a třetí nechť splývají s ordinálami prostoru Π . Pak prostory Π a Δ se protínají v rovině ρ . Tato rovina leží s přímkou a v témž prostoru Δ a protíná se s ní v hledaném bodě P .

Sestrojme tedy k obrazu $k_3 = a_3$ krycí přímky $k \subset \rho$, pomocí dvou jejích bodů A', B' , její první obraz. Potom zřejmě $k_1 = A'_1 B'_1$ protne přímku a_1 v prvním obraze P_1 průsečíku P .



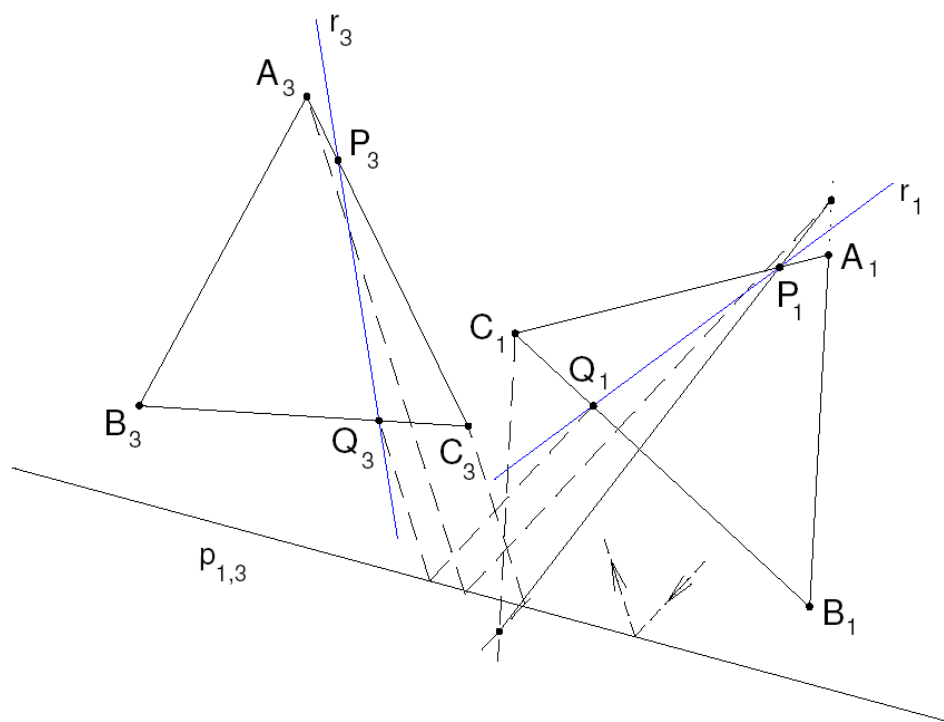
Obr. 3.1.4

Rovina a prostor

Na obr. 3.1.5 máme určit průsečnici r roviny $\rho = (ABC)$ s prostorem Π , určeným osou $p_{1,3}$ a směry ordinál.

Podle předchozího můžeme snadno sestavit průsečíky P, Q dvou přímek AC, BC s prostorem Π . Pro průsečnici pak platí $r = PQ$.

Při konstrukci je vhodné volit rovnoběžky body A_1, B_1, C_1 tak, aby je šlo použít pro oba průsečíky, tj. volíme je v přímce $A_1 B_1$ a v rovnoběžce bodem C_1 .



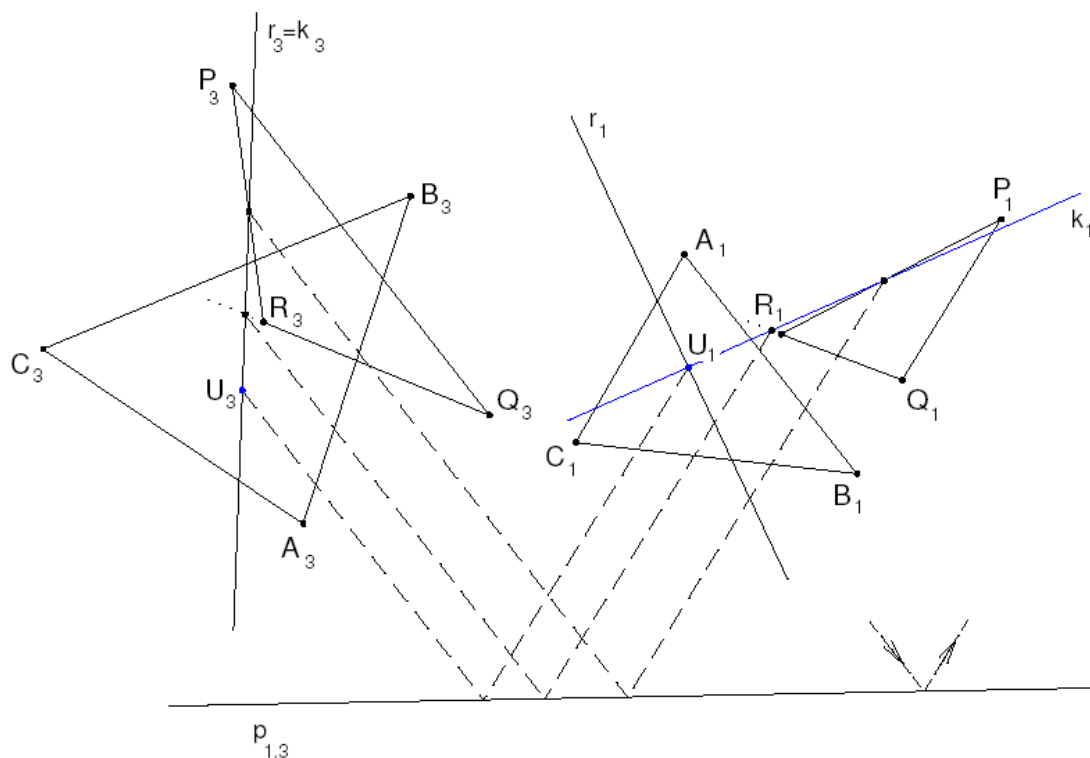
Obr. 3.1.5

Dvě roviny

Průsečík U dvou rovin $\rho = (ABC)$ a $\sigma = (PQR)$ lze sestavit tak, že proložíme jednou z nich, např. σ , prostor Π - obr. 3.1.6.

Ordinály jsou rovnoběžné např. s P_1Q_1 a P_3Q_3 , z čehož se stanoví osa totožnosti $p_{1,3}$. Podle předchozího dále sestojíme průsečnici $r = \rho \cap \Pi$ a průsečík přímky r s rovinou σ je hledaný bod U .

Při konstrukci využijeme krycí přímky $k \subset \sigma$, pro kterou platí $k_3 = r_3$, a zřejmě $U_1 = r_1 \cap k_1$.



Obr. 3.1.6

Na základě těchto polohových úloh můžeme snadno sestavit přímku, která je průnikem tří prostorů. Jde o konstrukci společné roviny dvou prostorů a její průsečnice s třetím prostorem.

Čtyři prostory mají v \overline{E}_4 obecně společný jeden bod, který je průsečíkem všech čtyř rovin, v nichž se prostory po dvou protínají. Stačí ovšem určit dvě roviny, z nichž jedna je průsekem dvou prostorů a druhá průsekem zbývajících dvou prostorů, a podle obr. 3.1.6 sestavit jejich průsečík.

Poslední úlohu této kapitoly lze využít ke grafickému řešení čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých x, y, z, t . Jedna taková rovnice je rovnicí prostoru v \overline{E}_4 , který nejlépe zobrazíme pomocí jeho průsečíků s osami x, y, z, t . Čtyři takové rovnice určují v \overline{E}_4 čtyři prostory, jejichž průsečík U má souřadnice vyhovující daným rovnicím.

Úloha:

Řešte graficky soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}3x - 5y + 3z + 2t &= 9 \\5x - 3y + 4z + 6t &= 32 \\-4x + 2y + 3z &= 9 \\-y + z + 2t &= 8.\end{aligned}$$

Řešení 1 (obr. 3.1.7):

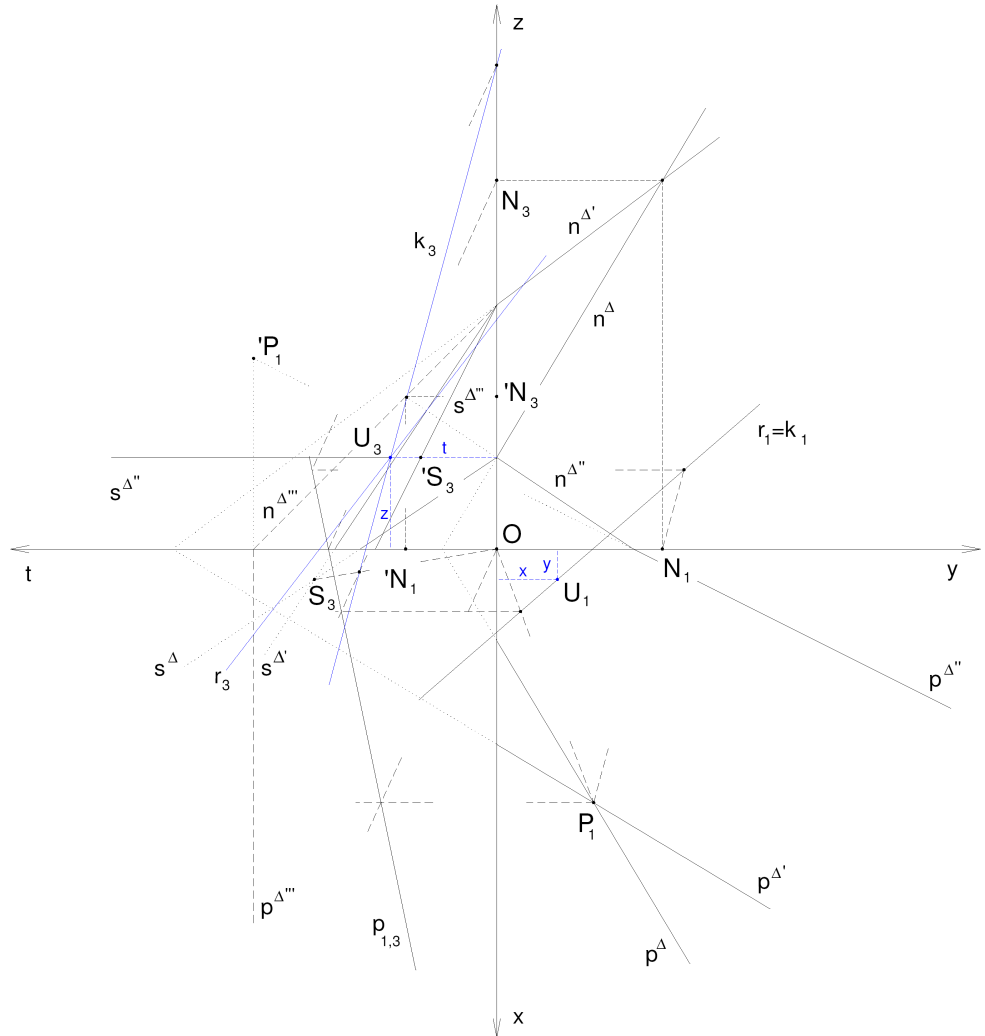
Úseky prostoru Δ , určeného první rovnicí, na osách x, y, z, t jsou $3, -\frac{9}{5}, 3, \frac{9}{2}$.

Z nich určíme stopy $p^\Delta, n^\Delta, s^\Delta$ prostoru Δ . Stejný postup použijeme i pro prostory $\Delta', \Delta'', \Delta'''$ zadané zbývajícemi rovnicemi.

Dále uvažujme dvě roviny $\rho = \Delta \cap \Delta', \sigma = \Delta'' \cap \Delta'''$. Pak rovina ρ je určena stopníky P, N, S a rovina σ stopníky $'P, 'N, 'S$. Podle obr. 3.1.6 sestrojíme průsečík U obou rovin.

Rovinou ρ proložíme prostor Π , přičemž ordinály jsou rovnoběžné s N_1S_1 a N_3S_3 . Sestrojíme průsečnici $r = \sigma \cap \Pi$ a pomocí krycí přímky $k \subset \rho$, kde $k_1 = r_1$, určíme třetí obraz k_3 přímky k . Zřejmě $U_3 = k_3 \cap r_3$ a můžeme tedy sestrojit první obraz U_1 bodu U .

Souřadnice bodu U jsou $[1;2;3;3,5]$, což je řešení dané soustavy.



Obr. 3.1.7

Řešení 2 (obr. 3.1.8):

Součinitele u neznámé x považujeme za složky vektoru OA v souřadných osách x, y, z, t . Tedy koncový bod A má souřadnice $[3;5;-4;0]$. Podobně sestrojíme vektory OB, OC, OD , jejichž komponenty v osách jsou součinitele u neznámých y, z, t . Koncové body mají souřadnice $B = [-5;-3;2;-1]$, $C = [3;4;3;1]$, $D = [2;6;0;2]$. Jako poslední určíme také vektor OP , jehož složky v osách jsou absolutní členy na pravé straně soustavy rovnic.

Jsou-li tyto složky velké, zvolíme jejich určité díly. V obr. 3.1.8 je zvolena $\frac{1}{4}$, takže dostaneme bod $P' = \left[\frac{9}{4}; 8; \frac{9}{4}; 2 \right]$ a zřejmě vektor $OP = 4 \cdot OP'$.

Soustava rovnic vyjadřuje, že násobíme-li vektor OA číslem x , OB číslem y , OC číslem z a OD číslem t , musí mít součet takto znásobených vektorů za výsledek vektor OP .

Rozložíme-li tedy vektor OP na složky směrů OA, OB, OC, OD , pak poměry těchto složek k OA, OB, OC, OD udávají kořeny x, y, z, t soustavy. Jelikož jsme vektor OP redukovali na $\frac{1}{4}$ ve vektor OP' , musíme čísla, která dostaneme rozkladem vektoru OP' , násobit nakonec ještě čtyřmi.

Rozklad vektoru OP' provedeme tak, že nejprve bodem P' sestrojíme přímkou $k \parallel OA$ a sestrojíme její průsečík K s prostorem $(OBCD)$. Přímkou k proložíme prostor Π , kolmý k třetí průmětně, takže $\Pi_3 = k_3$. Tento prostor protíná prostor $(OBCD)$ v rovině, kterou určíme průsečíky s přímkami OC, BC, OD , u kterých stanovíme první a druhé obrazy. Příмка k protíná tuto rovinu v bodě K , který sestrojíme stejně jako při Mongeově promítání v trojrozměrném prostoru. Délka $P'K$ je složkou vektoru OP' ve směru OA , a jelikož se poměr rovnoběžných úseček promítáním nemění, je $x = 4 \cdot \frac{P'_1 K_1}{A_1 O_1} = 4 \cdot \frac{\sqrt{34}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{34}} = 1$, kde

$$K_1 = \left[\frac{3}{2}; \frac{27}{4} \right].$$

Další rozklad provedeme již v prostoru $(OBCD)$, který obsahuje bod K . Při konstrukci si vystačíme pouze s prvním a druhým obrazem. Bodem K vedeme přímku $l \parallel OB$ a stanovíme průsečík L s rovinou (OCD) . Pak je

$$y = 4 \cdot \frac{K_1 L_1}{B_1 O_1} = 4 \cdot \frac{\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{34}} = 2, \text{ kde } L_1 = \left[4; \frac{33}{4} \right].$$

Dále již v rovině (OCD) sestrojíme přímkou $m \parallel OC$ a její průsečík M s OD . Pak

$$\text{je } z = 4 \cdot \frac{L_1 M_1}{C_1 O_1} = 4 \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{5} = 3, \text{ kde } M_1 = \left[\frac{7}{4}; \frac{21}{4} \right]. \text{ Zřejmě také platí}$$

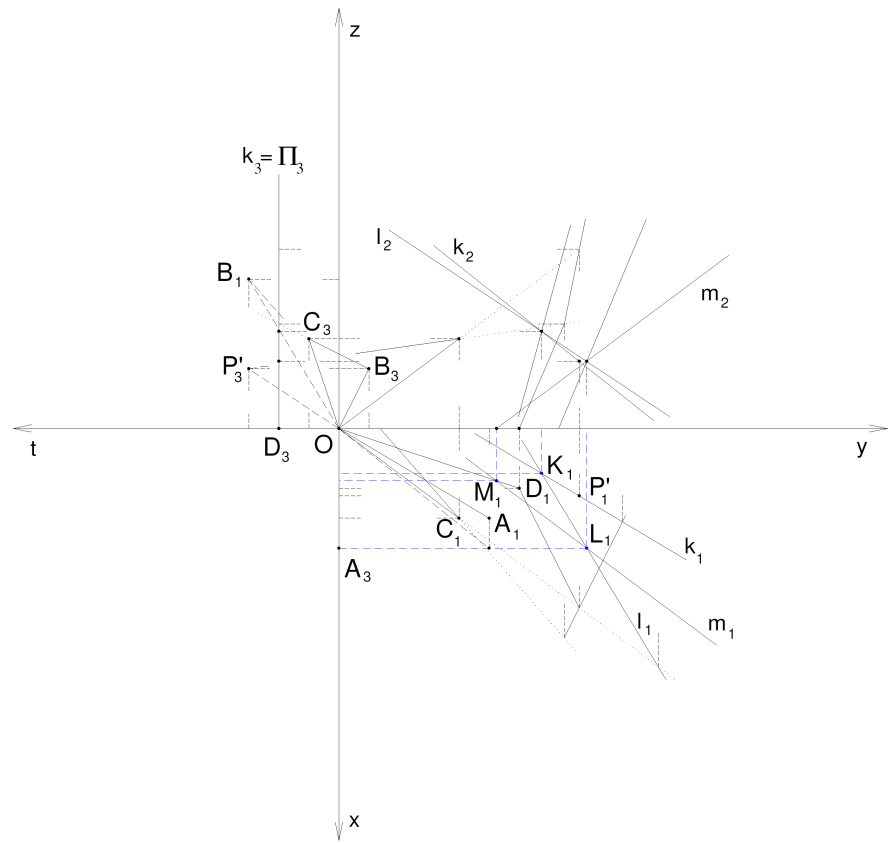
$$t = 4 \cdot \frac{M_1 O_1}{D_1 O_1} = 4 \cdot \frac{\sqrt{490}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{40}} = 3,5. \text{ Řešením dané soustavy rovnic je tedy bod}$$

$$U = [1; 2; 3; 3,5].$$

Znaménko u neznámých x, y, z, t je + nebo - podle toho, zda složky $P_1 K_1$, $K_1 L_1$, $L_1 M_1$, $M_1 O_1$ mají s $A_1 O_1$, $B_1 O_1$, $C_1 O_1$, $D_1 O_1$ stejný nebo opačný směr.

Poznámka:

Obr. 3.1.7 a 3.1.8 jsou sestrojeny v měřítku 1 : 2.



Obr. 3.1.8

3.2 Metrické úlohy

Zde uvedené úlohy se v podstatě týkají vzájemné kolmosti přímek, rovin a prostorů. Přitom nejzákladnější úlohou je zde sestavení skutečné velikosti úsečky.

Skutečná velikost úsečky

Je zřejmé, že úsečka se promítá ve skutečné velikosti na tu průmětnu, se kterou je rovnoběžná. Pak je ale kolmá na průmětnu, určenou osami, které neleží v té průmětně, a na tuto se promítá jako bod.

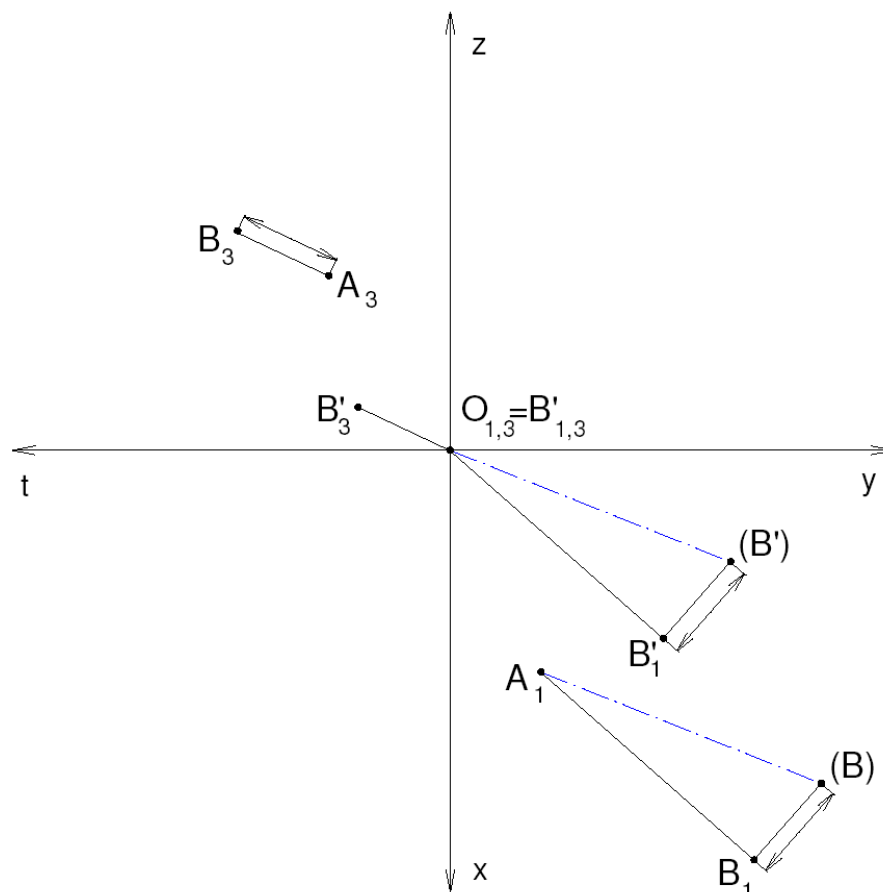
Mějme úsečku AB v obecné poloze vzhledem k průmětnám - obr. 3.2.1. Počátkem O vedeme úsečku $OB' \parallel AB$. Stejnolehlé průměty těchto úseček jsou opět rovnoběžné a stejně dlouhé. Rovnoběžník $OB'BA$ se tedy promítá opět jako rovnoběžník.

První promítací rovina $(s_{1,2}B')$ bodu B' protíná průmětnu (xy) v bodě B'_1 . Úsečka $B'B'_1$ je tedy kolmá k průmětně (xy) a tudíž třetí průmět $B'_3B'_{1,3}$ je skutečnou velikostí délky $B'B'_1$.

Dostáváme tak skutečnou velikost úsečky OB' (a tím také úsečky AB) v přeponě $O_1(B')$ ⁸ pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách $O_1B'_1$ a $O_3B'_3$.

Skutečnou velikost úsečky AB můžeme ale přímo dostat v přeponě pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny jsou rovny délkám prvního a třetího průmětu – obr. 3.2.1.

⁸ (B') je sklopený bod B' , tedy sklopení provádíme stejným způsobem jako v trojrozměrném prostoru - Urban, A.: Deskriptivní geometrie I., Praha, 1965.



Obr. 3.2.1

Vzdálenost bodu od roviny nebo od přímky se řeší stejně jako v trojrozměrném prostoru.⁹ Bod určuje s rovinou prostor, s přímkou rovinu, a v nich již příslušné vzdálenosti dovedeme vyhledat.

Úloha, která se poprvé objevuje až v prostoru \bar{E}_4 , je vzdálenost bodu od prostoru. Podívejme se tedy nejprve na ni.

Vzdálenost bodu od prostoru

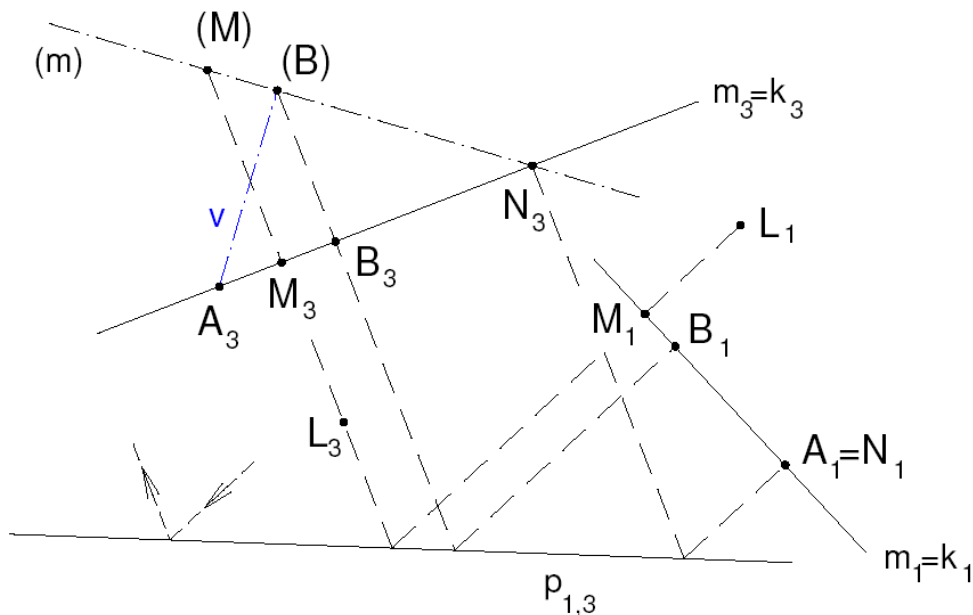
Mějme prostor Π určený osou totožnosti $p_{1,3}$ a směry ordinál (obr. 3.2.2) a libovolný bod A , jehož vzdálenost v od prostoru Π chceme určit.

⁹ Urban, A.: Deskriptivní geometrie I., Praha, 1965

Zvolme si libovolný bod $L \in \Pi$, potom $|AL| = \sqrt{(A_1L_1)^2 + (A_3L_3)^2}$. Vzdáleností bodu A od Π budeme nazývat délku, která je ze všech délek $|AL|$ nejkratší, probíhá-li bod L prostor Π . Je zřejmé, že nejbližší bod $B \in \Pi$ musí mít obrazy na kolmicích k_1, k_3 spuštěných z A_1 a A_3 na příslušné ordinály prostoru Π .

Nechť M je libovolný bod prostoru Π , jehož obrazy M_1, M_3 leží na kolmicích k_1, k_3 . Sestrojíme-li skutečnou velikost $|AM|$ v třetím obraze jako délku $A_3(M)$, budou body (M) pro různá M vyplňovat přímku $(m) = N_3(M)$, kde $N_1 = A_1$, $N_3 \in k_3$ a zároveň $N \in \Pi$.

První a třetí promítací prostor přímky k protínají prostor Π v přímce m , která je určena body M, N , a pro niž platí $m_1 = k_1, m_3 = k_3$. Úsečka $A_3(B) \perp (m)$ je nejkratší spojnici bodu A s bodem prostoru Π a je tedy vzdáleností v bodu A od prostoru Π . Z (B) lze odvodit obrazy B_3, B_1 paty B kolmice k k prostoru Π .



Obr. 3.2.2

Kolmost přímky k k prostoru Π vyplývá z následujícího:

Připomeňme si pojem absolutní kvadrika a s ní spojenou definici velikosti úhlu dvou přímek.¹⁰

Absolutní kvadrika v prostoru \bar{E}_4 je imaginární kulová plocha $\mathbf{Q} \subset \Omega_\infty$ určena rovnicemi

$$x_0 = 0, \quad \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 0.$$

Nechť je $\angle(a, b)$ úhel přímek a, b . Jsou-li A_∞, B_∞ průsečíky těchto přímek s nevlastním prostorem Ω_∞ , pak přímka $A_\infty B_\infty$ protíná kvadriku \mathbf{Q} ve dvou komplexně sdružených bodech M, N . Pak dvojpoměr $d = (A_\infty B_\infty MN)$ je komplexní jednotka.

Definice:

Velikost úhlu $\angle(a, b)$ je dána předpisem

$$|\angle(a, b)| = \left| \frac{1}{2} i [\ln d] \right|,$$

kde $[\ln d]$ je hlavní hodnota funkce $\ln d$.

Je-li $d = -1$, pak $|\angle(a, b)| = \frac{\pi}{2}$ a body A_∞, B_∞ jsou polárně sdružené vzhledem ke \mathbf{Q} . Přímky a, b jsou v tomto případě kolmé.

Dále si uvědomme, že úběžné body souřadných os tvoří polární čtyřstěn $X_\infty, Y_\infty, Z_\infty, T_\infty$ vzhledem ke \mathbf{Q} , jehož výšky se protínají v témž bodě, který je středem imaginární kulové plochy \mathbf{Q} .

Označme $P_\infty, N_\infty, S_\infty$ úběžné body stop p^Π, n^Π, s^Π prostoru Π na $(xy), (yz), (zt)$. Platí, že nevlastní body příslušných ordinál leží v polárních rovinách bodů P_∞, S_∞ .

Úběžný bod K_∞ přímky $k = AB$ je tedy pólem úběžné roviny $(P_\infty N_\infty S_\infty)$ prostoru Π vzhledem k absolutní ploše \mathbf{Q} .

¹⁰ Machala, F., Slezák, V.: Geometrie grup kolineací, skriptum UP, Olomouc, 2001

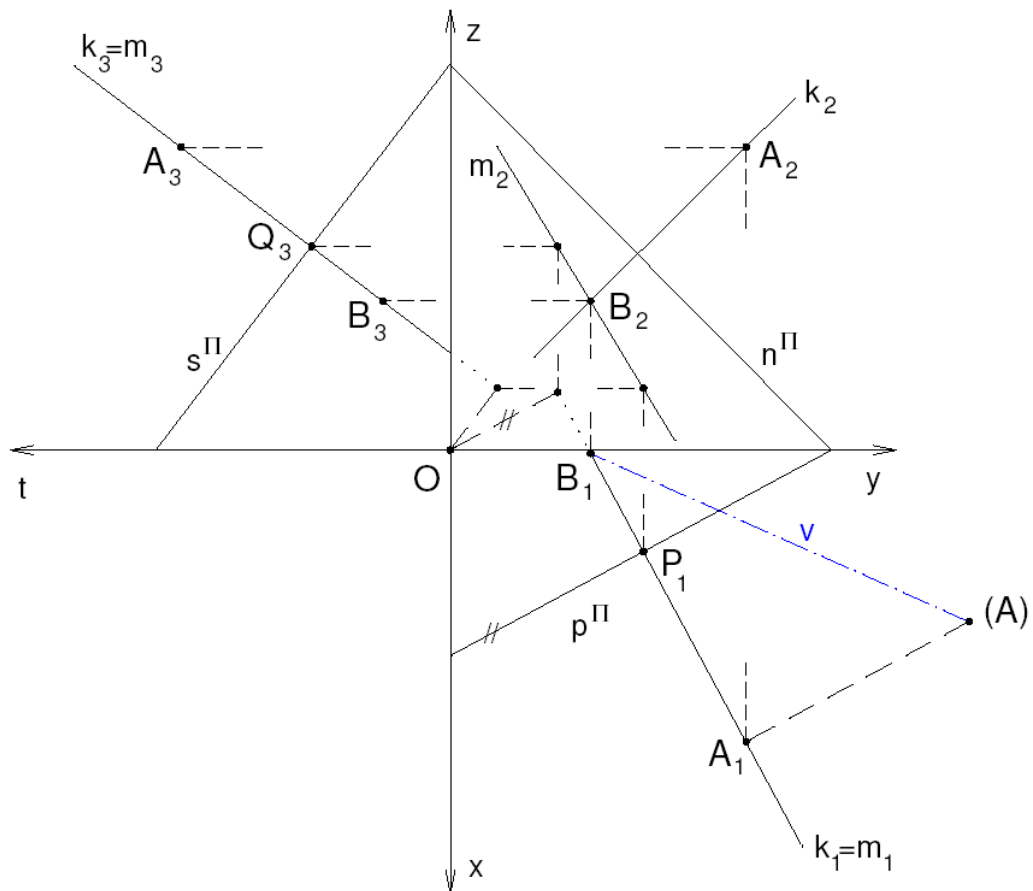
Z předchozích poznatků tedy dostáváme větu:

Věta:

Přímka, kolmá k prostoru, má své průměty kolmé k příslušným stopám prostoru.

Na obr. 3.2.3 je zadán prostor Π svými stopami a bod $A \notin \Pi$. Máme opět určit vzdálenost v bodu A od Π .

Kolmice k k prostoru Π , vedená z bodu A , má $k_1 \perp p^\Pi$, $k_2 \perp n^\Pi$, $k_3 \perp s^\Pi$. Určíme druhý obraz m_2 přímky $m \subset \Pi$, jejíž průměty $m_1 = k_1$, $m_3 = k_3$. K sestrojení využijeme dvou bodů P, Q přímky m , z nichž první má P_1 na p^Π a druhý má Q_3 na s^Π . Navíc jejich druhé hlavní obrazy získáme užitím ordinál prostoru Π . Obraz m_2 protíná k_2 v druhém obraze B_2 hledané paty B kolmice k . Určíme tedy hlavní obrazy B_1, B_3 bodu B a vzdálenost $v = |A\Pi| = B_1(A)$.



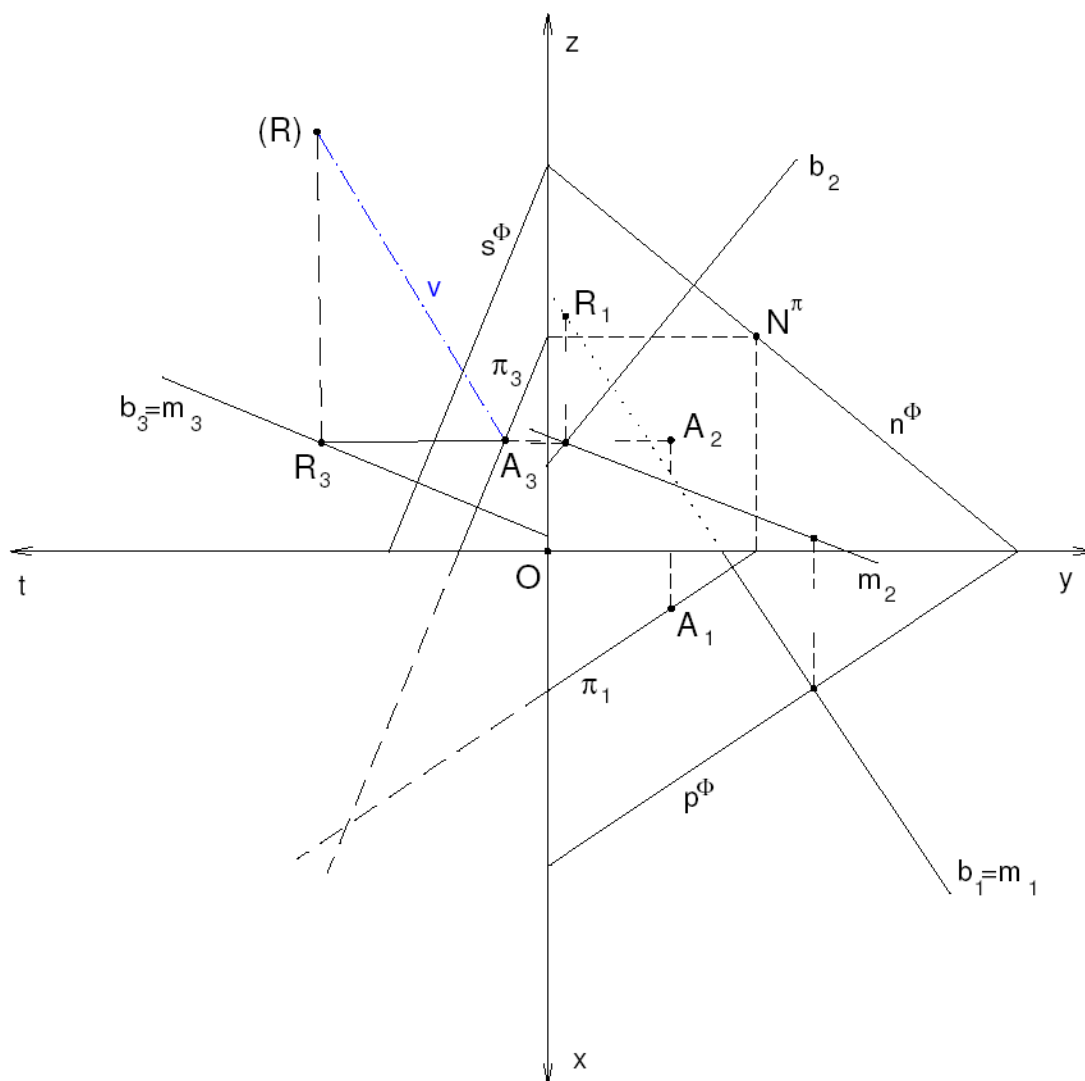
Obr. 3.2.3

Vraťme se nyní k úloze najít vzdálenost bodu od přímky nebo od roviny, i když bylo již řečeno, že tyto úlohy se řeší stejně jako v trojrozměrném prostoru.

Vzdálenost bodu od přímky

Pro určení vzdálenosti bodu A od přímky b můžeme výhodně využít hlavní roviny π prostoru Φ , který je kolmý na danou přímku - obr. 3.2.4.

První a třetí průmět této roviny je zřejmě (dle obr. 3.2.3) kolmý na příslušné hlavní obrazy přímky b . Pomocí stopníku N^π můžeme doplnit jednotlivé stopy prostoru Φ . Dále již postupujeme stejně jako v obr. 3.1.3 a sestrojíme tak průsečík $R = b \cap \Phi$. Hledaná vzdálenost $v = |Ab| = A_3(R)$.

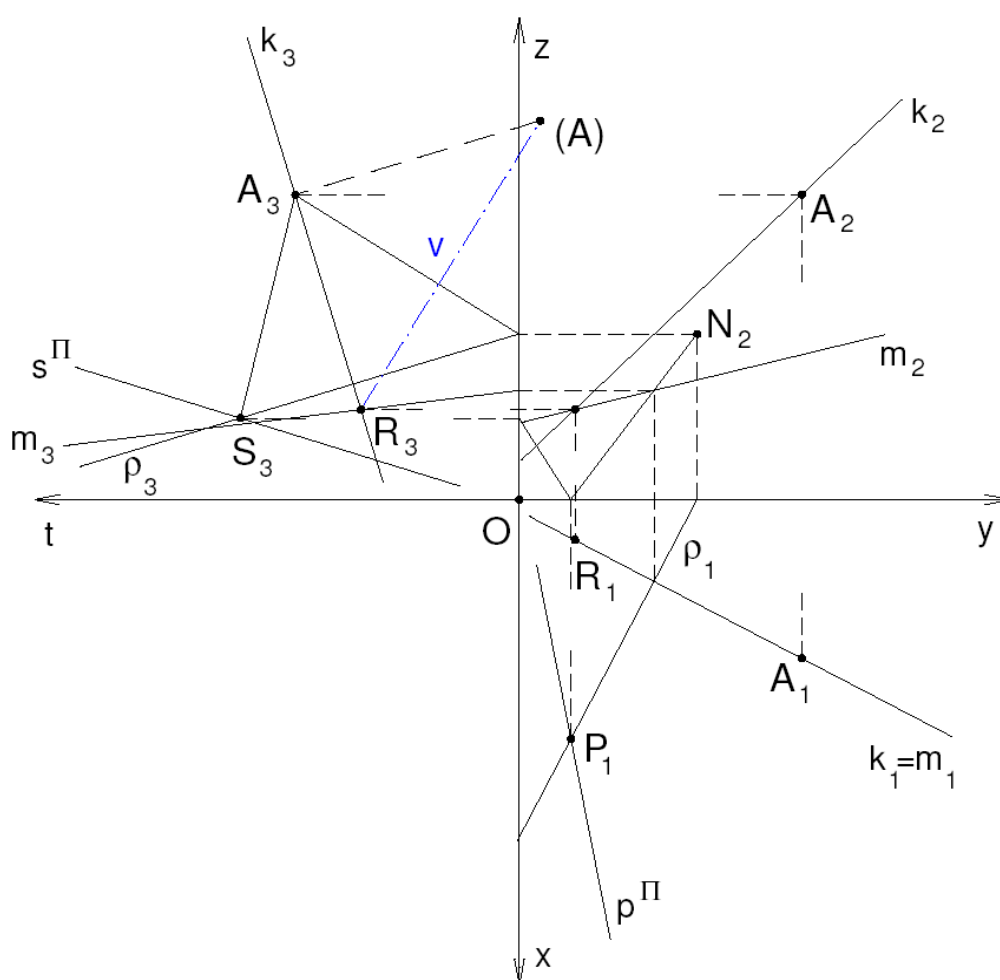


Obr. 3.2.4

Vzdálenost bodu od roviny

Na obr. 3.2.5 je sestrojena vzdálenost bodu A od roviny ρ . Využíváme toho, že hlavní obrazy kolmice k vedené z bodu A k rovině jsou kolmé k jejím průmětům.

Dále víme, že daná rovina a bod A nám určují prostor Π , který lze sestrojit podle obr. 2.4.6, a ve kterém zároveň leží i přímka k . Nakonec pomocí krycí přímky $m \subset \rho$ sestrojíme průsečík R této roviny s přímkou k . Hledaná vzdálenost $v = |A\rho| = R_3(A)$.

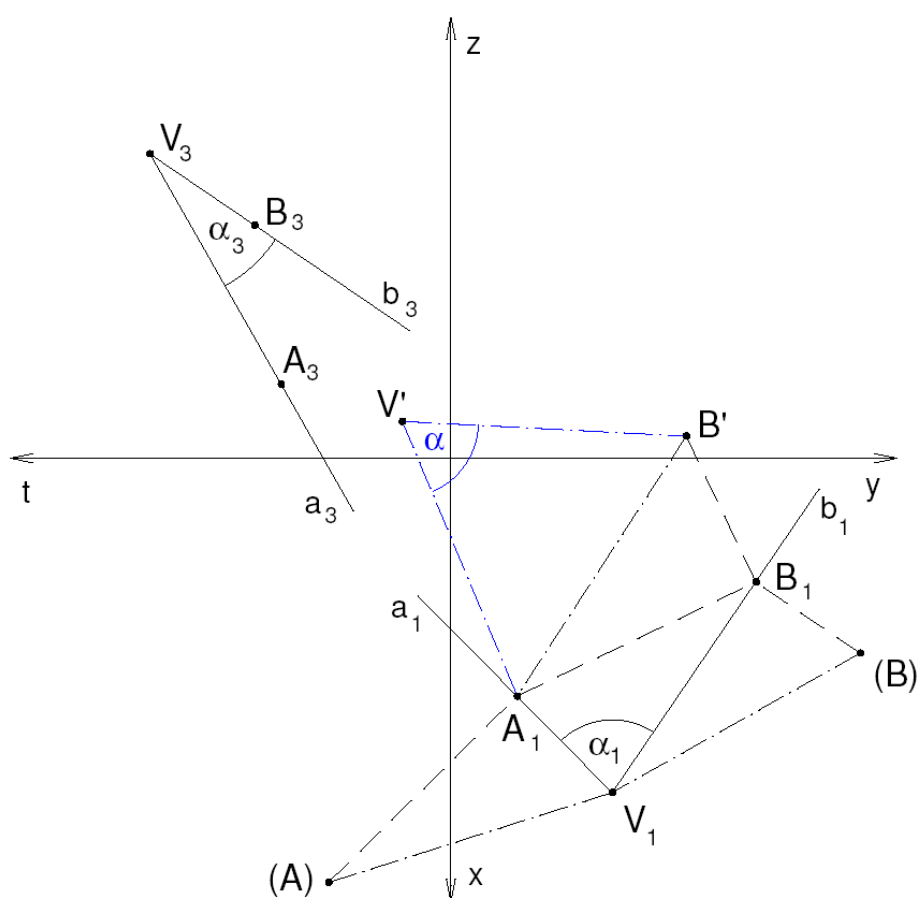


Obr. 3.2.5

Mezi poslední metrické úlohy patří úlohy o sestrojení odchylky dvou podprostorů.

Odchylka dvou přímek

Velikost úhlu α (neboli odchylku) dvou přímek a, b , které se protínají v bodě V , sestrojíme pomocí vzdálenosti dvou bodů – obr. 3.2.6. Na ramenech a, b si zvolíme po řadě body A, B a určíme skutečnou velikost $\angle A_1V'B'$ trojúhelníka AVB , sestrojením skutečných velikostí všech jeho stran. Pak $\alpha = |\angle A_1V'B'|$.



Obr. 3.2.6

Na tento případ převedeme odchylku přímky od prostoru, roviny, nebo mimoběžné přímky. V prvním případě je to velikost úhlu, který svírá přímka se svým kolmým průmětem do prostoru. V druhých případech vedeme libovolným bodem přímky rovinu nebo přímku, rovnoběžnou s danými útvary.

Úhel, který svírají dva prostory nebo prostor s rovinou je doplňkový k úhlu, který svírá kolmice k tomuto prostoru s těmito útvary. Zbývá tedy ještě vyšetřit odchylku dvou rovin.

Úhel dvou rovin

Mějme dvě roviny ρ a σ . Zvolme, bez újmy na obecnosti, rovinu ρ kolmou k (zt) , tedy její průmět ρ_3 je bodem, a druhá rovina σ nechť je dána obrazy jejích bodu A, B, C - obr. 3.2.7. Průsečík R obou rovin má $R_3 = \rho_3$ a R_1 určíme na základě afinity $\mathcal{A}: A_3B_3C_3 \leftrightarrow A_1B_1C_1$, do níž se zobrazuje rovina σ .

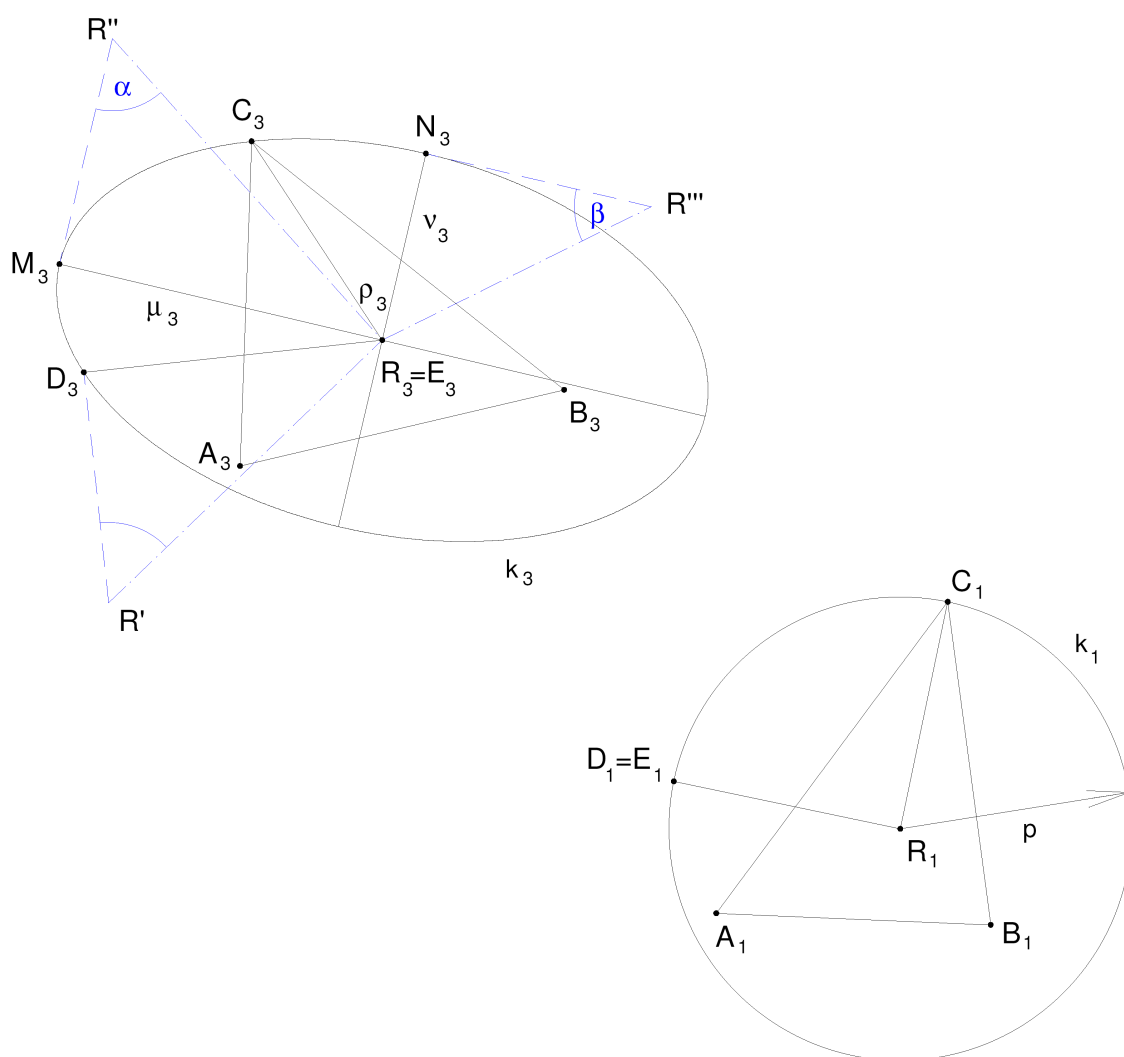
Bodem R v rovině σ prochází svazek přímek. Jednotlivé přímky svírají se svými kolmými průměty do ρ úhly, které jsou obecně různé, a z nich je jeden největší α a jeden nejmenší β . To jsou úhly rovin ρ a σ .

Konstrukce je následující: V prvním obraze opišme kolem bodu R_1 kružnici k_1 s poloměrem např. R_1C_1 . Uvažujme body $D_1 \in k_1$ jako první obrazy bodů D roviny σ . Body D_3 leží na elipse k_3 , která v afinitě \mathcal{A} odpovídá kružnici k_1 . Sestrojme tedy pár sdružených poloměrů R_3C_3, R_3D_3 , přičemž $R_1D_1 \perp R_1C_1$. Elipsa k_3 má dvě poloosy R_3M_3, R_3N_3 .

Body D_1 kružnice k_1 můžeme brát také jako první obrazy E_1 bodů E roviny ρ , jejichž třetí obrazy leží vesměs v bodě ρ_3 . Jelikož rovina ρ je rovnoběžná s (xy) , je kolmý průmět bodu D do ρ v bodě E , kde $E_1 = D_1$.

Nyní vyšetřeme skutečnou velikost $\angle DRE$ v třetím obraze. Stačí sestrojít $D_3R' \perp D_3E_3$, přičemž $D_3R' = R_1D_1 = p$ je poloměrem kružnice k_1 . Úsečka E_3D_3 je skutečná velikost odvěsny DE , D_3R' je skutečná velikost odvěsny RE , která je v prvním obraze, a R_3R' je skutečnou velikostí přepony RD . Úhel při vrcholu R' je skutečnou velikostí úhlu přímky RD s rovinou ρ .

Měníme-li bod $D_1 = E_1$ na k_1 , bude se měnit i tento úhel a zřejmě maxima α nabude pro vrchol M_3 hlavní poloosy a minima β pro vrchol N_3 vedlejší poloosy, čímž jsou určeny oba úhly rovin ρ a σ .



Obr. 3.2.7

Roviny μ, ν ramen těchto úhlů jsou polokolmé k první i třetí průmětně a promítají se jak v třetím, tak v prvním obraze do přímek kolmých (první obrazy nejsou v obr. vyznačeny).

V případě, kdy kružnici k_1 v afinitě \mathcal{A} odpovídá kružnice k_3 , tj. afinita \mathcal{A} přejde v podobnost, svírají všechny přímky roviny σ , jdoucí bodem R , s rovinou ρ stejné úhly.

Pokud poměr podobnosti je $k = A_3B_3 : A_1B_1$, jsou stejné úhly dány $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \dots = k$. Pro shodnost platí $\alpha = \beta = \frac{1}{4}\pi$.

4. Základy dalších promítání v \overline{E}_4

Zobecněné Mongeovo promítání v \overline{E}_4 je zvláštním případem následujícího *obecnějšího promítání*:

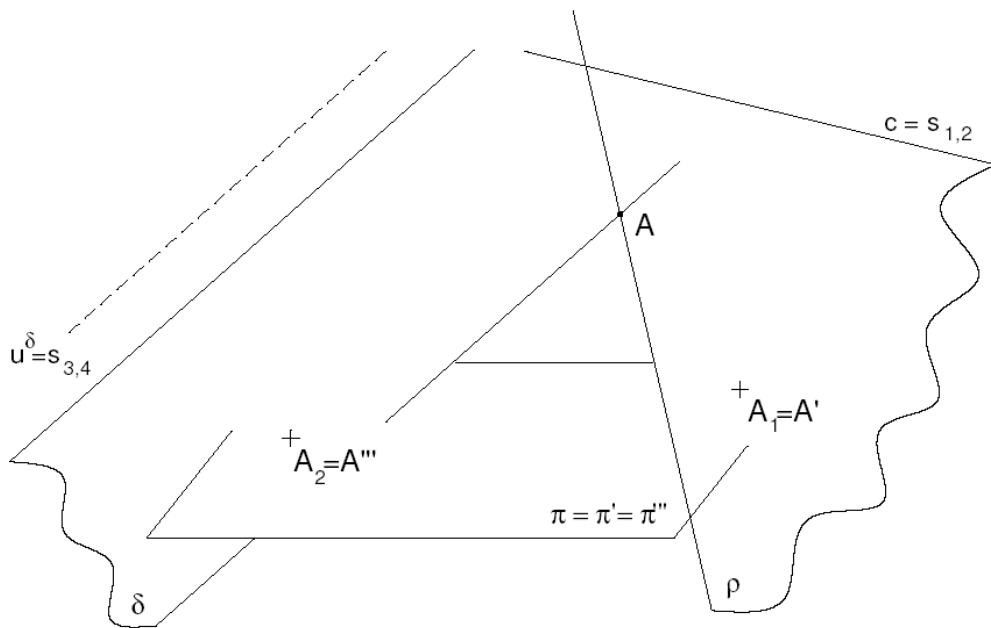
V prostoru \overline{E}_4 mějme dvě přímky $s_{1,2}$, $s_{3,4}$ a dvě průmětny π' a π'' , které jsou vzájemně v obecné poloze. Bod A promítáme z $s_{1,2}$ do π' do bodu A' a z $s_{3,4}$ na π'' do A'' . Promítací roviny kolem $s_{1,2}$ a $s_{3,4}$ tvoří trsy rovin. Je zřejmé, že průměty A' , A'' určují bod A jednoznačně v průsečíku rovin $(s_{1,2}A')$, $(s_{3,4}A'')$.

- V případě, že $\pi' = \pi'' = \pi$, lze rovinu π zobrazit s příslušnými průměty na nákresně – obr. 4.1. Dr. Václav Hlavatý zobrazuje čtyřrozměrný prostor tak,¹¹ že volí $s_{1,2}$ ve vlastní přímce a $s_{3,4}$ v úběžné přímce rovin zcela kolmých k průmětně π . Jeho postup je následující:

Pětí body, které neleží v témž trojrozměrném prostoru, je určen prostor \overline{E}_4 . Tři z nich určují rovinu π a dva zbývající přímku c , která rovinu π neprotíná. Je-li v tomto čtyřrozměrném prostoru dán bod A , pak rovina $\rho = (cA)$ protíná průmětnu π v bodě A_1 , který nazýváme prvním průmětem bodu A . Promítáme-li tentýž bod A z úběžnice u^δ roviny δ , totálně kolmé k π , pak rovina $(u^\delta A)$ protíná rovinu π v bodě A_2 , který nazýváme druhým průmětem bodu A .

¹¹ Hlavatý, V.: Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, ročník LII, 1923

Jsou-li útvary c a π v prostoru pevně stanoveny, pak je bod A jednoznačně určen body A_1, A_2 , neboť se roviny $(cA_1)=(cA)=\rho, (u^\delta A_2)=(u^\delta A)=\delta$ protínají v bodě A . Jelikož lineární prostory dimenze $n=0,1,2,3$ jsou určeny jedním až čtyřmi body, je tak úloha promítání útvarů v prostoru \bar{E}_4 z přímky c na rovinu π rozřešena.



Obr. 4.1

- Nesplývají-li průmětny π', π'' , protínají se v bodě O a je nutné, promítnout je do téže roviny π . Vedme bodem O v π' přímkou y a v rovině π'' přímkou z , které nechť určují rovinu π . V prostoru $(\pi'\pi)$ si zvolíme libovolný bod 1S , z něhož promítneme rovinu π' do π tak, že průmět A' se promítne do A_1 . Stejně tak promítneme rovinu π'' z libovolného bodu 3S prostoru $(\pi\pi'')$ do π , takže A'' má za průmět A_3 . Body A prostoru \bar{E}_4 se tedy promítají v páry bodů A_1, A_3 roviny π a platí také obráceně, že takové dvojici bodů A_1, A_3 přísluší obecně jediný bod A .

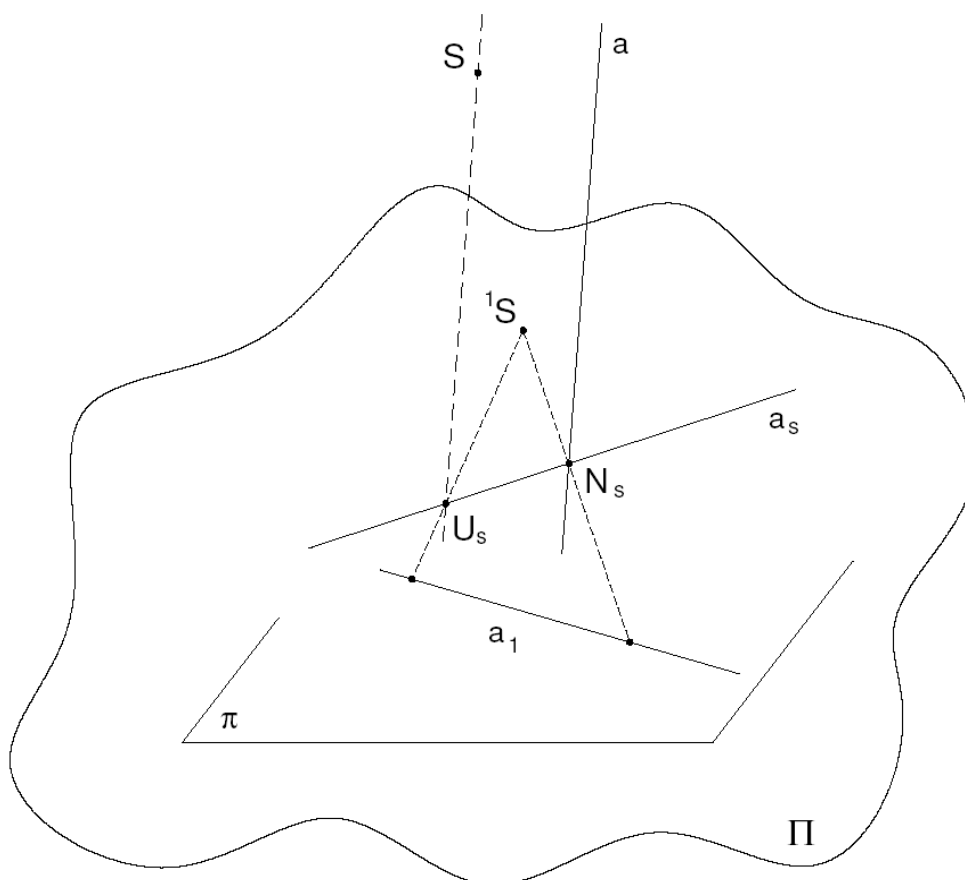
V případě Mongeovy projekce v \bar{E}_4 , jsou $s_{1,2}, s_{3,4}$ úběžnými přímkami průměten $\pi''=(zt)$ a $\pi'=(xy)$ a průmětna $\pi=(yz)$.

Střed 1S je v jednom z úběžných bodů přímek shodně promítajících rovinu π' do π v prostoru (xyz) . Bod 3S jedním z úběžných bodů přímek shodně promítajících rovinu π''' do π v prostoru (yzt) .

V prostoru \bar{E}_4 lze však promítat také z bodu S na prostor Π , přičemž střed promítání $S \notin \Pi$. Takto získané středové průměty v Π je třeba ještě zobrazit na rovinu π – obr. 4.2.

To můžeme provést např. opět *středovým promítáním* z bodu 1S prostoru Π na rovinu $\pi \subset \Pi$. Bod 1S může být patou kolmice, spuštěné z S na Π . Základním prvkem pro toto promítání není bod, ale přímka.

Přímka a se promítá z bodu S opět do přímky a_s prostoru Π , kterou určíme stopníkem $N_s = a \cap \Pi$ a úběžníkem U_s , do něhož se promítá úběžný bod U přímky a . Průmět a_s promítneme z 1S do π v přímku a_1 atd..



Obr. 4.2

Zvolíme-li střed promítání S jako úběžný bod, dostaneme v \overline{E}_4 *rovnoběžné promítání* na prostor Π . Kolmé, jestliže S_∞ je úběžným bodem kolmic k prostoru Π , jinak *šikmé*.

Bylo by možné v prostoru \overline{E}_4 zavést také *dvojtředové promítání* ze dvou středů $^1S, ^2S$ na prostor Π je neobsahující. Protíná-li spojnice $^1S^2S$ prostor Π v bodě $^1S_2 = ^2S_1 = U$ tzv. *uzlu*, bude se bod A promítat ve dva body A_1, A_2 , jejichž spojnice prochází tímto uzlem.

Body prostoru \overline{E}_4 se tak promítají v dvojici bodů, ležící vždy na též paprsku trsu o středu U prostoru Π . Bodové pole roviny ρ se promítá do dvou rovinných polí prostoru Π , která jsou ve středové kolineaci o středu v bodě U . Prostor Δ má za průmět prostorovou středovou kolineaci v Π o středu U a samodružné rovině $\rho = \Pi \cap \Delta$.

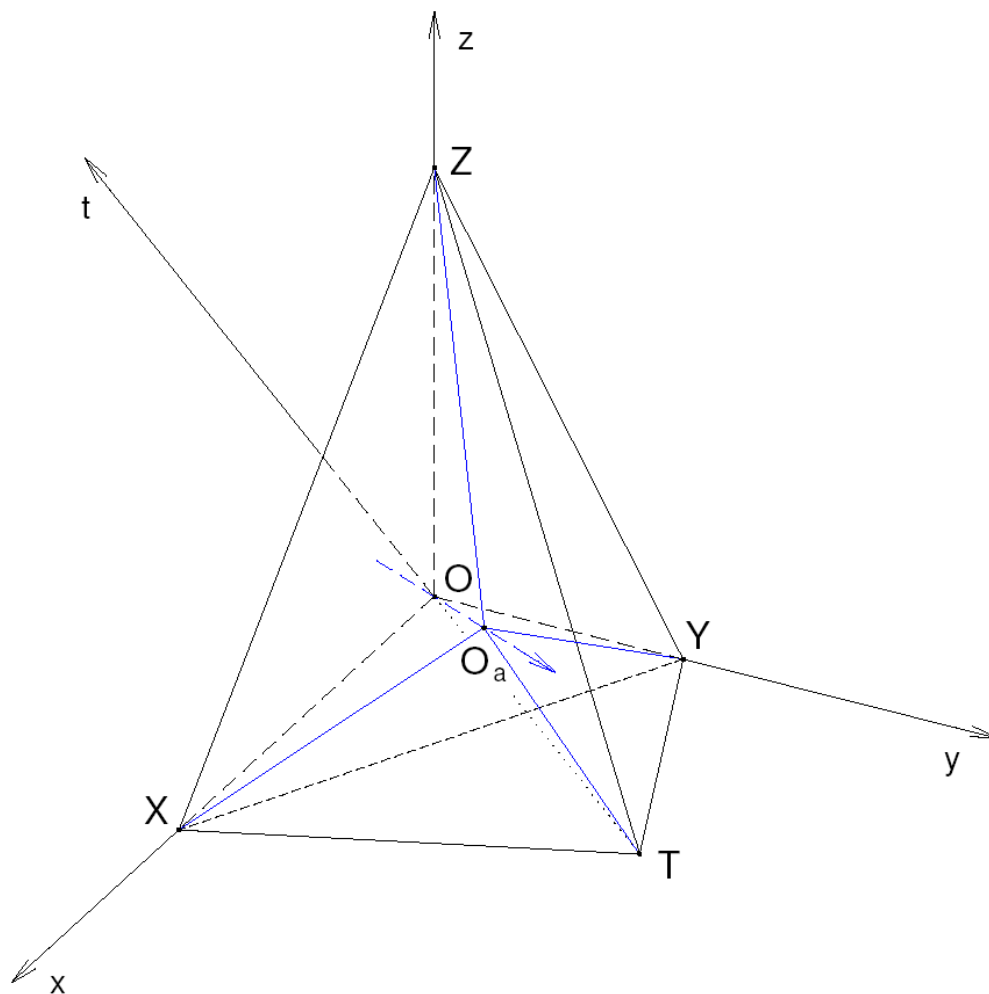
Kdyby středy $^1S, ^2S$ měly stejné vzdálenosti od Π , byl by uzel U úběžným bodem prostoru Π . Jestliže by přitom $^1S^2S$ oční vzdálenosti (65mm) dostali bychom *stereoskopickou projekci* prostoru \overline{E}_4 . Příslušné obrazy pro každé oko by byly však prostorové.

V prostoru \overline{E}_4 lze dostat také *axonometrii*. Zavedeme si pravoúhlou soustavu souřadnic $\langle O; x, y, z, t \rangle$. Leží-li počátek O mimo prostor Π , označíme stopníky os x, y, z, t na Π písmeny X, Y, Z, T . Tyto body pak tvoří v prostoru Π tzv. axonometrický čtyřstěn – obr. 4.3. Kolmice, spuštěné z jeho vrcholů na protější stěnu, se protínají v jediném bodě O_a , který je kolmým průmětem počátku O na Π .

Dále např. přímka O_aX je kolmá k rovině (YZT) . Jelikož platí, že $OO_a \perp \Pi$ a $OX \perp (OYZT)$, pak rovina (OO_aX) je kolmá k průseku obou prostorů, tj. k rovině (YZT) . Musí být tedy i přímka O_aX kolmá k (YZT) .

Průměty os v kolmé axonometrii jsou ve výškách O_aX , O_aY , ... axonometrického čtyřstěnu. Při kosoúhlé axonometrii by byly průměty os ve spojnicích kosoúhlého průmětu O_k počátku O s vrcholy toho čtyřstěnu.

Dostáváme zde vztahy v prostoru podobné těm, které v rovině přísluší axonometrickému trojúhelníku.



Obr. 4.3

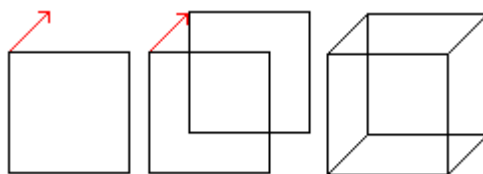
5. Čtyřrozměrná krychle

5.1 Vlastnosti

Roku 1800 se v Evropě mluvilo o čtvrté dimenzi především na večírcích nebo jiných společenských akcích. Posléze se ale názory na čtvrtý rozměr dostaly přes oceán až do Spojených států amerických. Hlavní zastánce této problematiky byl anglický matematik *Charles Hinton*, který většinu svého života strávil představami o čtyřrozměrných objektech. Jako první vymyslel název pro čtyřrozměrnou krychli - *tesseract* [teserakt]. Obecně se každá krychle s dimenzí větší než tři nazývá hyperkrychle.

Vzhledem k tomu, že naše reálné představy ve čtyřrozměrném prostoru selhávají, budeme vycházet z analogií v prostorech s nižší dimenzí. Ze stereometrie víme, že při studiu prostorových útvarů je vhodné, abychom si tyto útvary zobrazili v rovině pomocí volného rovnoběžného promítání.

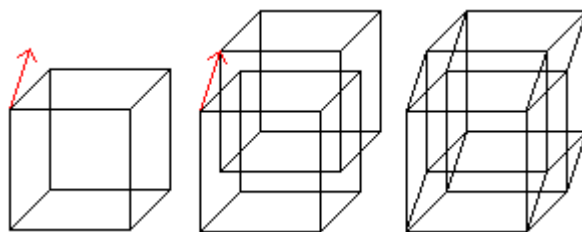
Krychli si tedy nakreslíme tak, že čtverec o straně a posuneme např. o délku $\frac{1}{2}a$ v rovině a spojíme odpovídající si body základního a přesunutého čtverce –
obr. 5.1.1.



Obr. 5.1.1

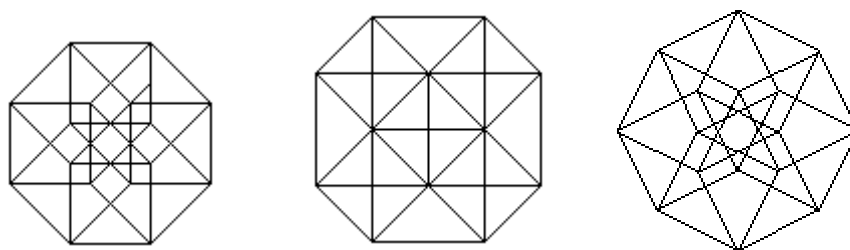
Podobně můžeme získat náčrtek čtyřrozměrné krychle v rovině. Přiměřeně posuneme naši trojrozměrnou krychli (obr. 5.1.2) a znovu spojíme odpovídající si body, tj. levý přední horní vrchol základní krychle s levým předním horním vrcholem přesunuté krychle atd..

Je nutné však podotknout, že tento náčrtek vznikl dvojím průmětem naší čtyřrozměrné krychle. Nejprve jsme promítnuli hyperkrychli do trojrozměrného prostoru a poté se tento objekt promítnul do prostoru dvojrozměrného.



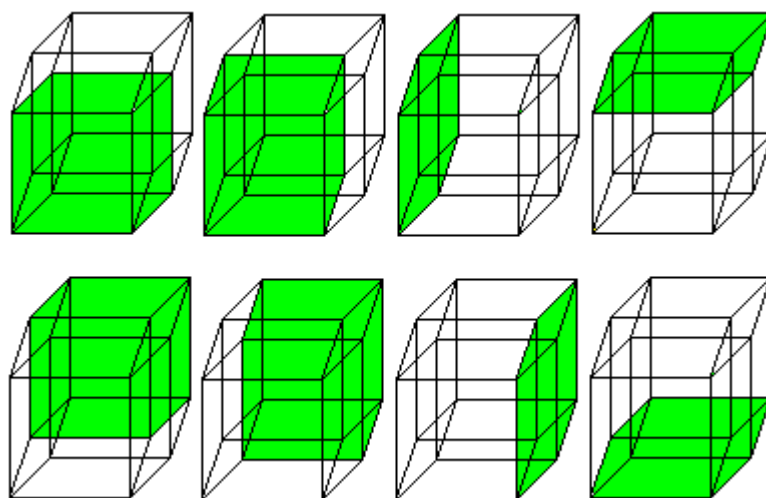
Obr. 5.1.2

Vzhledem k libovlnnému posunutí trojrozměrné krychle, můžeme dále tvrdit, že obr. 5.1.2 je jeden z mnoha možných náčrtků hyperkrychle. Některé z těch dalších si prohlédněme na obr. 5.1.3.



Obr. 5.1.3

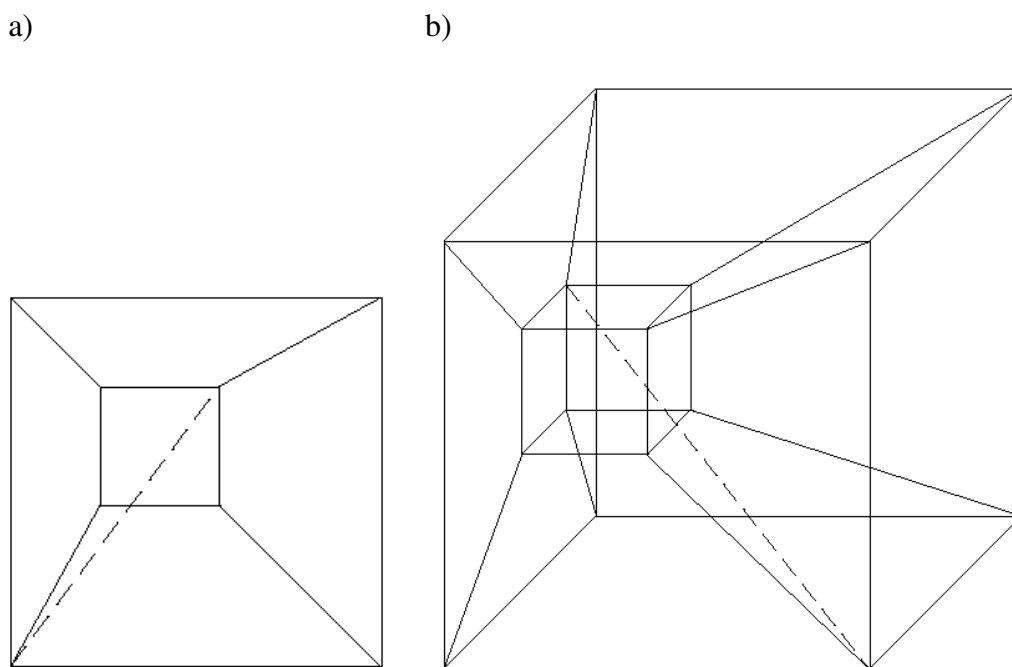
Dohromady má hyperkrychle celkem 8 stěn, 16 vrcholů a 32 hran. Stěnami jsou přitom čtyři dvojice protilehlých trojrozměrných krychlí, které reprezentují čtyři kolmé směry v prostoru \overline{E}_4 - obr. 5.1.4.



Obr. 5.1.4

Existují i lepší náčrtky krychle, tzv. středový průmět - obr. 5.1.5a. Při jeho konstrukci postupujeme stejně jako na obr. 5.1.1, avšak místo přesunutí uplatníme vhodnou stejnolehlost.

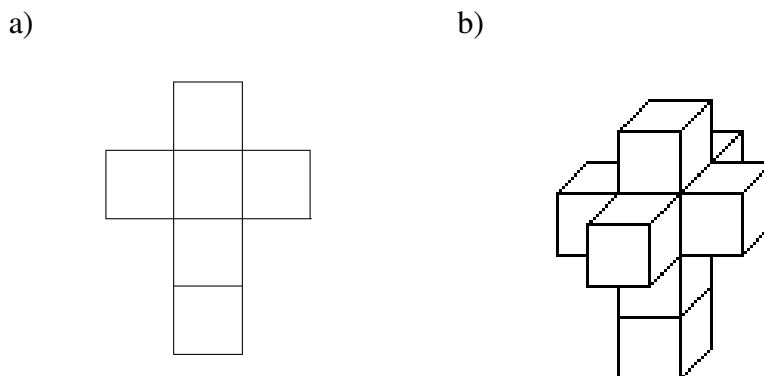
Pro hyperkrychli můžeme nakreslit také její středový průmět – obr. 5.1.5b. Na takových náčrtech se pak snadno vyznačí tělesové uhlopříčky – krychle jich má 4, hyperkrychle 8. Jedna z uhlopříček je ukázána na obr. 5.1.5.



Obr. 5.1.5

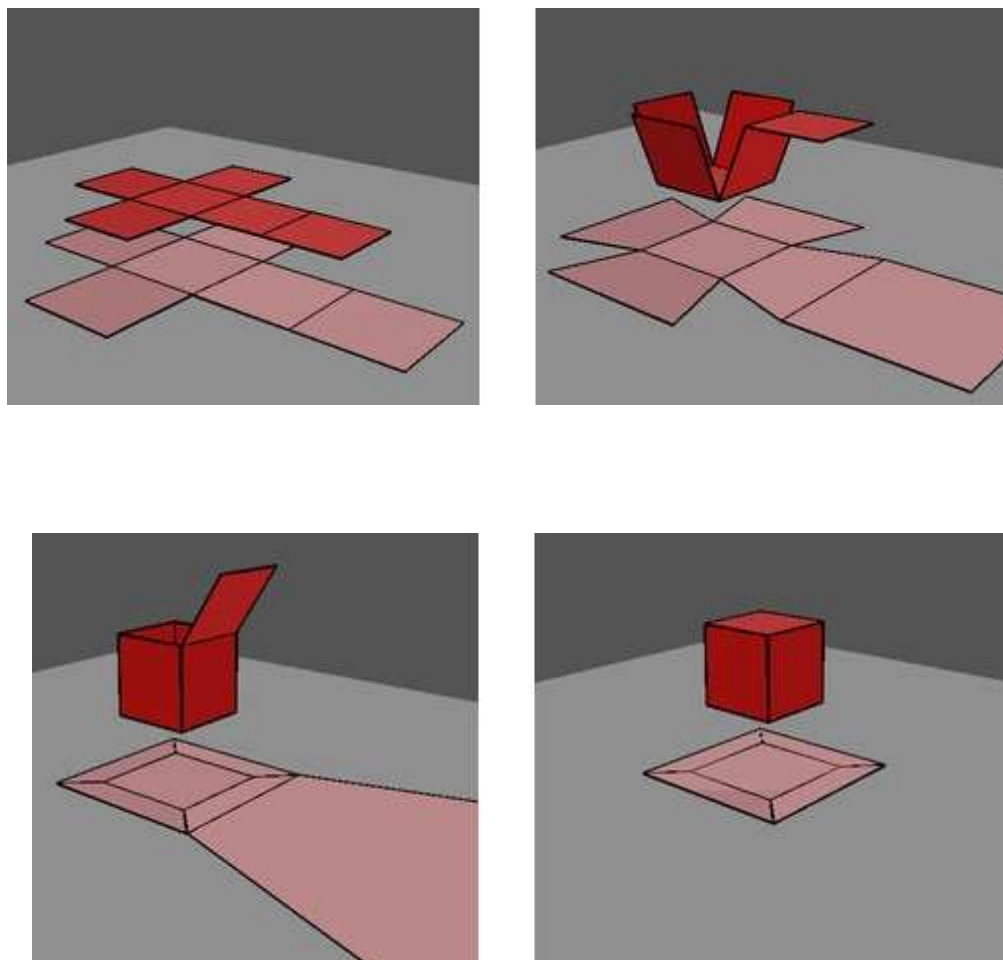
Sít

Stejně, jako jsme sestrojili náčrtek hyperkrychle (obr. 5.1.2), můžeme nakreslit i její síť – obr. 5.1.6b.



Obr.5.1.6

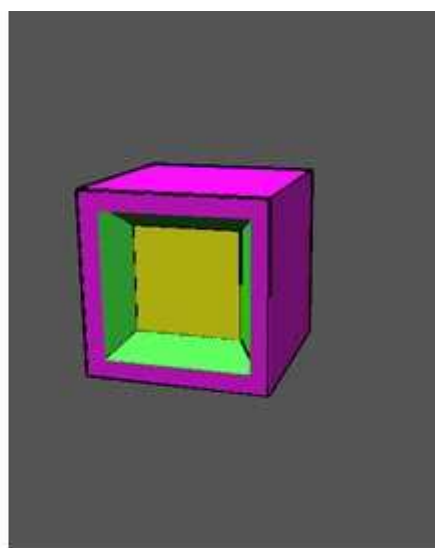
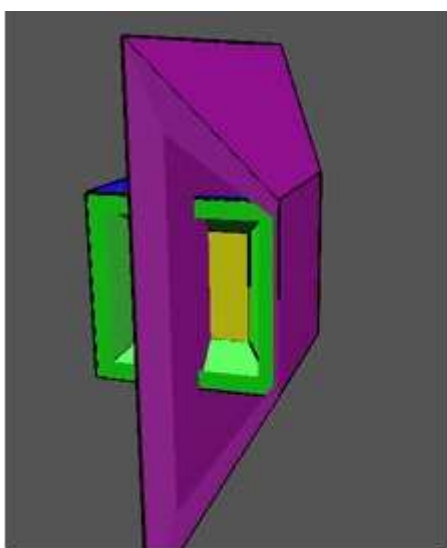
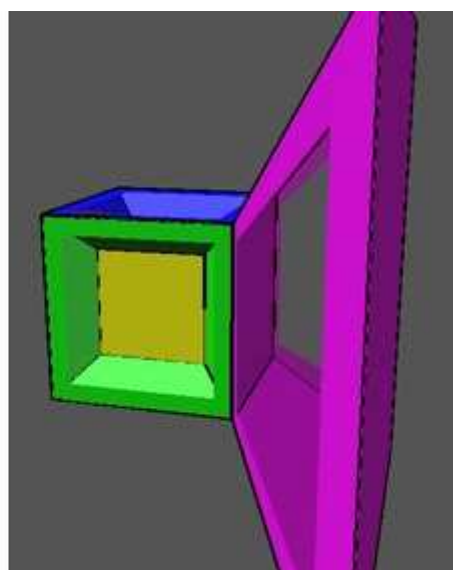
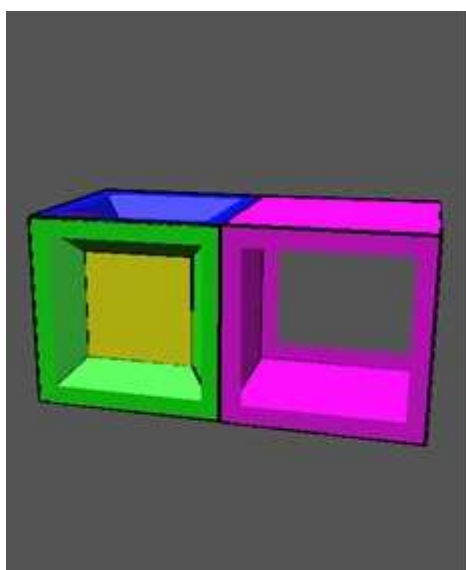
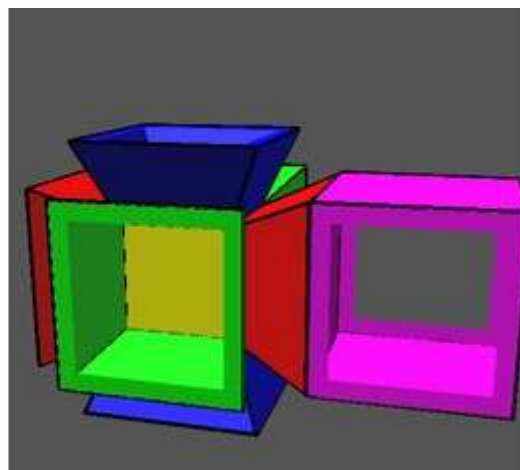
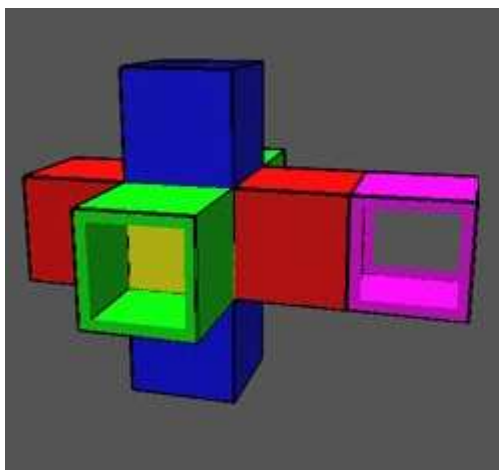
Obr. 5.1.6a jistě čtenář poznává a ví, že model trojrozměrné krychle vznikne slepením jednotlivých hran sítě tak, jak můžeme vidět v následující animaci – obr. 5.1.7.



Obr. 5.1.7

Naše třírozměrná představivost nám potom dovoluje „vidět vnitřek“ této krychle i na obr. 5.1.5a.

U hyperkrychle je to s naší představivostí poněkud horší. Sedm krychlí z její sítě lze po pružné deformaci slepit k sobě podél čtverců. Poslední, dolní, by se musela přilepit přibližně podle animace – obr. 5.1.8, což v našem prostoru nejspíše nepůjde. V prostoru \overline{E}_4 ano a přitom se mezi těmito krychlemi vytvoří čtyřrozměrný vnitřek.

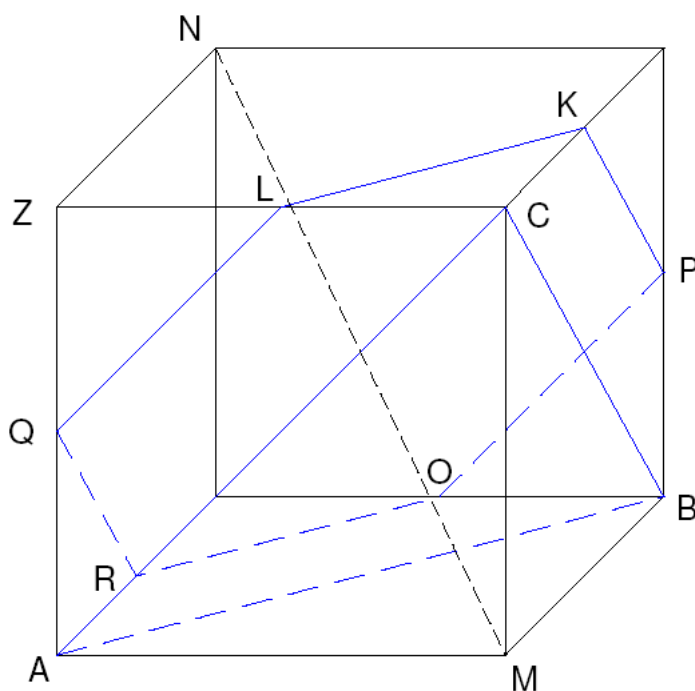


Obr. 5.1.8

5.2 Řez

Na obr. 5.2.1 vidíme řez krychle o délce hrany a rovinami, které jsou kolmé k tělesové uhlopříčce MN dané krychle a protínají ji v jedné třetině a v polovině. Můžeme si všimnout, že do vrcholů A, B, C trojúhelníkového řezu se dostaneme podélným přesunutím po všech hranách vycházejících z bodu M o stejnou vzdálenost a . Platí $a = |MC| = \frac{1}{3}(|MC| + |CZ| + |ZN|)$.

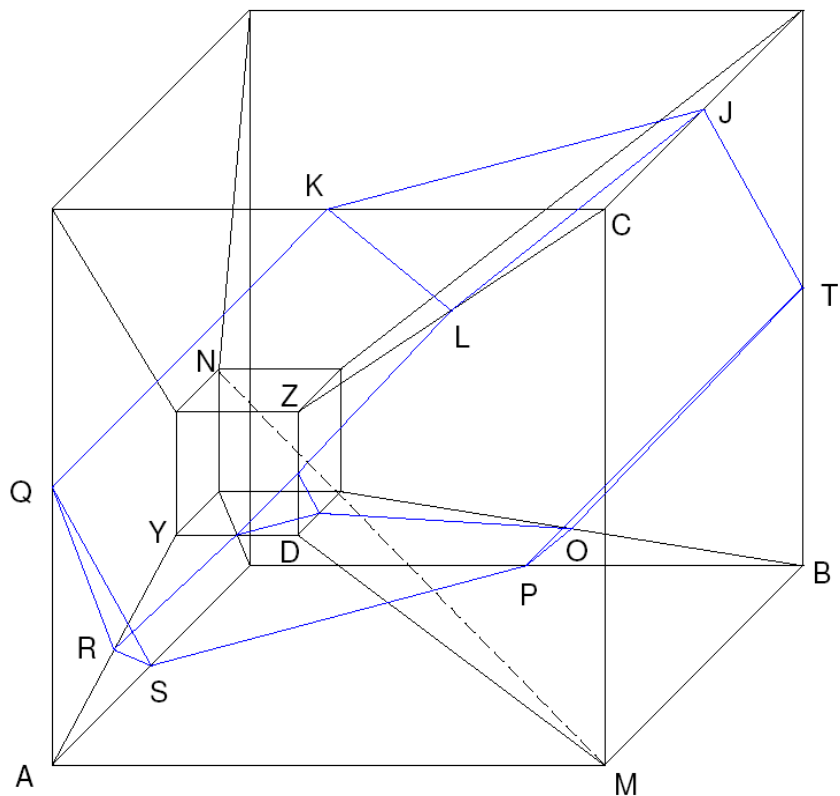
Při konstrukci vrcholů K, L šestiúhelníkového řezu se přesuneme z vrcholu C o vzdálenost $\frac{1}{2}a$ (máme $a + \frac{1}{2}a = |MC| + |CL| = \frac{1}{2}(|MC| + |CZ| + |ZN|)$) po všech hranách z něho vycházejících kromě toho, po kterém jsme se dostali do bodu C . Vrcholy Q, R a O, P získáme analogicky za pomoci bodů A, B .



Obr. 5.2.1

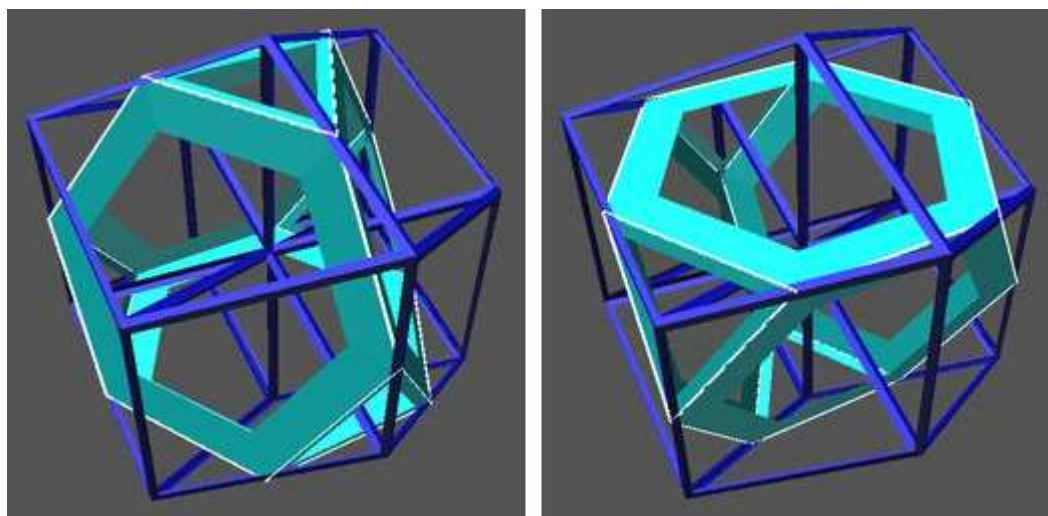
Podobným způsobem můžeme zkonstruovat řezy tesseractu trojrozměrnými prostorem kolmými k jeho tělesové uhlopříčce. Na obr. 5.2.2 je ukázán řez prostorem, který dělí uhlopříčku daného tesseractu v poměru 3:5. Získáme řez, který je ohraničen čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky a čtyřmi pravidelnými šestiúhelníky.

Vrcholy K, L, J jsou středy hran vycházejících z bodu C , vrcholy Q, R, S získáme za pomoci bodu A atd.. Potom úsečkami spojíme ty páry vrcholů hledaného mnohostěnu, které leží na hranách té samé stěny.



Obr. 5.2.2

Pro lepší „představivost“ nám může sloužit následující ukázka animace – obr. 5.2.3.



Obr. 5.2.3

O správnosti naší konstrukce se můžeme přesvědčit umístěním tesseractu do soustavy souřadnic a použitím operací známých z analytické geometrie.

5.3 Oblasti vlivu

V souvislosti se čtyřrozměrnou krychlí můžeme najít mnoho oblastí, ve kterých tento pojem vystupuje, nebo je nějakým způsobem ovlivnil. Tesseract, jako nové zajímavé těleso, je inspirací např. pro geometrii, zábavu nebo umění. Ukažme si tedy některé možnosti, jak „využít“ čtyřrozměrnou krychli.

Čtyřrozměrná magie

Tak jako se dají sestavit magické čtverce, dají se sestavit i magické krychle a dokonce i tzv. *magické hyperkrychle*. Nejprve si ale ukažme jednu z mnoha úloh pro magickou krychli.

Úloha:

Čísla 1, 2, 3, ..., 7, 8 vepište k vrcholům krychle tak, aby součet čísel při vrcholech téže stěny byl vždy týž.

Řešení:

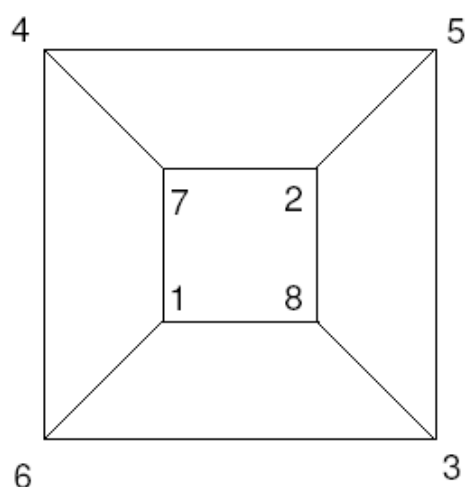
Abychom mohli provést očíslování vrcholů, je lepší si krychli vhodně nakreslit. Na obr. 5.1.5a jako bychom nahlíželi dovnitř krychle shora. Pro záznam našeho číslování je možná o něco vhodnější, než obr. 5.1.1, protože hrany se zde neprotínají a také stěny se nepřekrývají, s jednou výjimkou: horní stěna vlastně zakrývá všechny ostatní. To nám ale nijak situaci nezhoršuje.

Úloha lze vyřešit experimentálně, ale nám by zaručeně pomohlo, kdybychom věděli, čemu se má rovnat zmíněný součet. To se zjistí poměrně snadno následující úvahou.

V úloze číslujeme vrcholy a sčítáme podél stěn. Každý vrchol leží ve třech stěnách, stěn je šest. Hledaný součet v jedné stěně je tedy roven

$$\frac{3}{6}(1+2+\dots+8)=18.$$

Jedno z možných řešení úlohy je vidět na obr. 5.3.1.



Obr. 5.3.1

Jak už bylo naznačeno, záměrem předcházejících úvah je formulovat a případně i vyřešit podobné úlohy pro čtyřrozměrnou krychli. Ukažme si jednu z nich.

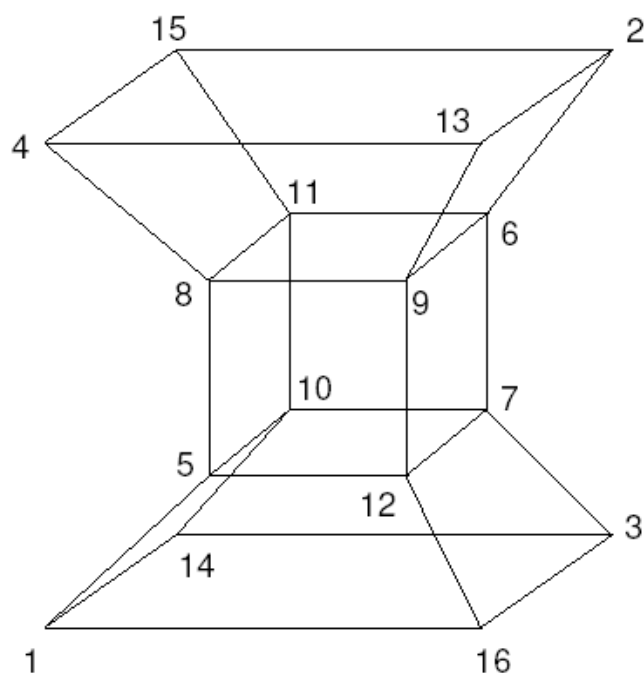
Úloha:

Vrcholy čtyřrozměrné krychle očísľujte čísla 1, 2, ..., 16 tak, aby součty v jednotlivých stěnách byly stejné.

Řešení:

Každý vrchol leží ve čtyřech stěnách, stěn je osm. Hledaný součet v jedné stěně je tedy roven $\frac{4}{8}(1 + 2 + \dots + 16) = 68$.

Pro očíslování si vybereme náčrtek podobný obr. 5.1.5b. Ukažme si tedy alespoň jedno z mnoha řešení této úlohy – obr. 5.3.2.



Obr. 5.3.2

Platónova tělesa ve čtyřrozměrném prostoru

Čtyřrozměrná krychle je jedním z Platónových těles v prostoru \overline{E}_4 . Obecně si můžeme Platónovo těleso nadefinovat, jako pravidelný čtyřrozměrný mnohostěn, jehož stěnami jsou trojrozměrná Platónova tělesa (všechna stejného druhu).

Jednotlivá tělesa můžeme získat např. pomocí souřadnic jejich vrcholů. Přitom platí, že všechny vrcholy leží ve stejné vzdálenosti od středu tělesa (který umístíme do počátku soustavy souřadnic). Vrcholy pak popíšeme vektory ze středu a všechny přitom můžeme umístit na jednotkovou „hyperkouli“.

Při získávání souřadnic vrcholů nám pomůže i symetrie. Pokud totiž necháme rotovat (tj. transformovat tak, aby se poloha středu nezměnila a vzdálenosti každých dvou bodů se zachovaly) Platónova tělesa tak, že jeden z vrcholů přejde do jiného vrcholu, pak jej lze natočit tak, že ostatní vrcholy zaujmou také místa předchozích vrcholů.

Díky těmto úvahám a mnoha výpočtům bychom získali šest Platónových těles.

Získaná tělesa:

	Počet hran	Trojrozměrné stěny	Počet hran ve vrcholu
5-vrcholan (5-stěn)	10	čtyřstěn	4
8-vrcholan (16-stěn)	24	čtyřstěn	6
16-vrcholan (8-stěn)	32	krychle	4
24-vrcholan (24-stěn)	96	osmistěn	8
120-vrcholan (600-stěn)	720	čtyřstěn	12
600-vrcholan (120-stěn)	1200	dvanáctistěn	4

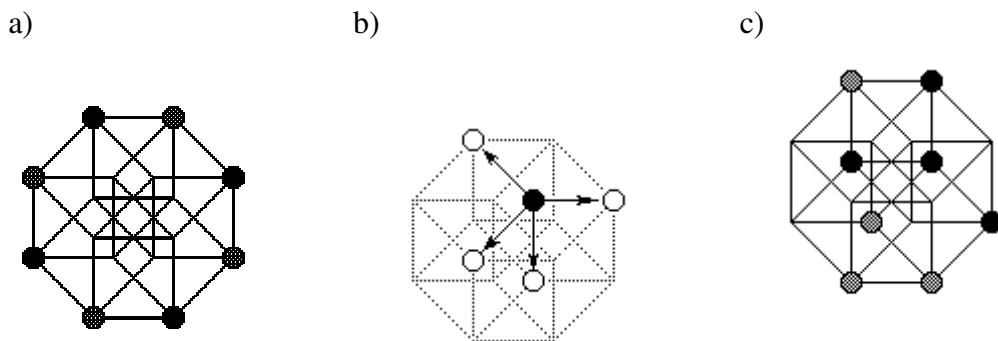
Smrt ve čtyřrozměrném prostoru

Tento název, na první pohled děsivý, patří hře, která vznikla na základě náčrtků čtyřrozměrné krychle.

Hrají ji dva hráči a potřebují jednu hyperkrychli (náčrtek) a osm kamenů – vždy čtyři jedné barvy.

Hra začíná střídavým rozložením barevných kamenů ve "vnějších" vrcholech hyperkrychle - obr. 5.3.3a. Potom se hráči střídají v posunu vždy jednoho z jejich kamenů. Posun probíhá podél hran krychle do neobsazených vrcholů. Přičemž z každé pozice má hráč čtyři možnosti – obr. 5.3.3b.

Cílem hry je vytvořit z kamenů spojitý řetězec nebo hvězdu. Za situace na obr. 5.3.3c vyhrává hráč s černými kameny.

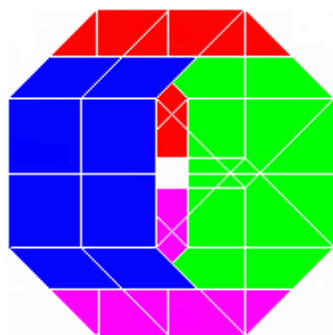


Obr. 5.3.3

Rubikova kostka

Tato čtyřrozměrná krychle má 16 rohů a 24 „tváří“. Na okrajích nemá žádné krychle, jen rohy a každý roh znamená jisté umístění – obr. 5.3.4. Rohy nezávisí na orientaci ve čtyřrozměrném prostoru.

Součástí této čtyřrozměrné Rubikovy kostky jsou také tlačítka, pomocí kterých se mění tváře krychle, a která odpovídající tváři na krychli otáčejí. Manipulovat s touto kostkou lze tedy pouze pomocí počítače.

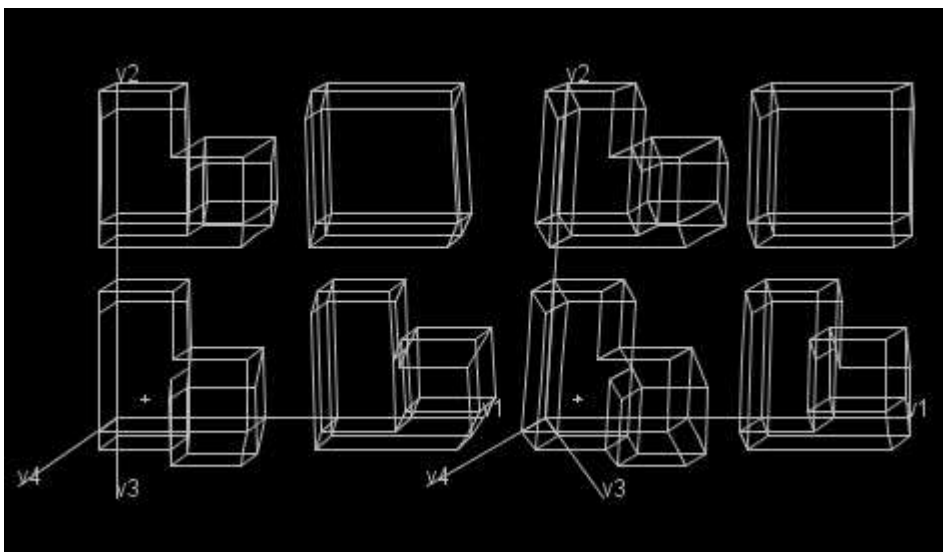


Obr. 5.3.4

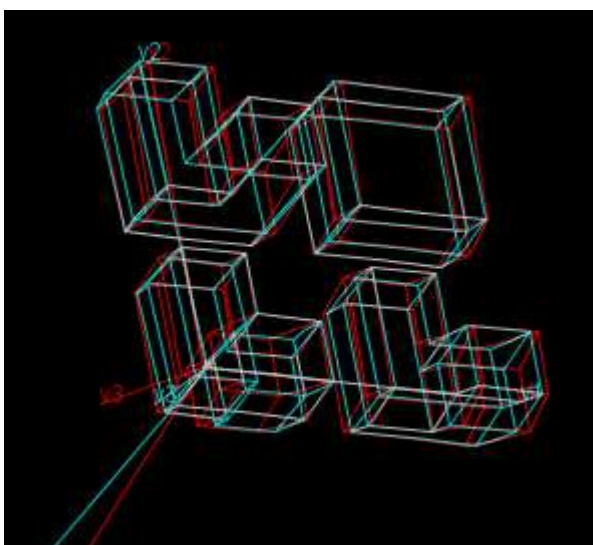
4D Building Blocks

Jedná se o novou verzi 4D Building Blocks pro zobrazení těles ve čtyřrozměrném prostoru. Následující obrázky jsou částí herní obrazovky. Verze obsahuje kavalírní a izometrickou projekci, dále verzi pro rovnoběžné promítání a pro anaglyfické brýle.

Kavalírní projekce/rovnoběžné promítání:



Izometrická projekce – anaglyfické brýle:



Umění

Léta 1890 - 1910 mohou být považována za „zlatá léta“ čtvrtého rozměru. Myšlenky o vyšších dimenzích ovlivnily především styly v umění, literatuře a filozofii.

Někteří odborníci, zabývající se historií umění, argumentovali, že čtvrtý rozměr rozhodně ovlivnil rozvoj kubismu a expresionismu v uměleckém světě. Především se jednalo o formu umělecké vzpoury proti zákonům o perspektivě.

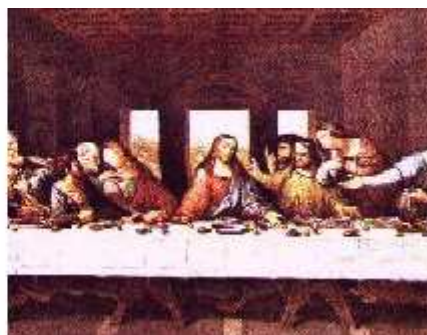
Pro *středověké náboženské umění* byl charakteristický hlavně nedostatek perspektivy. Obrazy byly plné „plochých lidí“ a „plochého okolí“ – obr. 5.3.5a. Toto umění odráželo náboženský pohled, kde Bůh byl všemohoucí a mohl tak vidět všechny části našeho světa rovnoměrně. Z tohoto důvodu podle církve muselo umění vyjadřovat názor Boha a všechny obrazy musely být dvourozměrné.

Renesanční umění bylo vzpourou proti těmto omezeným formám a perspektiva začala být v umění více populární – obr. 5.3.5b.

a)



b)



Obr. 5.3.5

Kolem roku 1910 založili P. Picasso a G. Braque nový malířský směr – *kubismus*. Vzbouřili se tak proti omezením, které předepisovala perspektiva. Malíři se důslednou analýzou tvarů pokusili o vyjádření čtvrtého rozměru.

Předměty jsou rozloženy do hran, křivek, úhlů a kruhů. Prostor obrazu tak není nazírán perspektivně, předměty nejsou zpracovány do hloubky obrazu, ale perspektiva kubistů vychází z obrazové plochy ven. Jako ukázka nám může sloužit obraz od P. Picassa - „Portrait of Dora Maar“ – obr. 5.3.6a.

a)



b)



Obr. 5.3.6

Čtyřrozměrná krychle byla později inspirací pro mnoho umělců. Například síť hyperkrychle je předmětem obrazu „Crucifixion“ – obr. 5.3.6b, jejímž autorem je Salvador Dalí.

Seznam literatury a použitých zdrojů

- [1] Kadeřávek, F., Klíma, J., Kounovský, J.: Deskriptivní geometrie II., ČSAV Praha, 1954
- [2] Molnár, J.: Hiperszešcian, Gradient 2 (30), 117 – 122, Warszawa, 1996
- [3] Kubát, V.: Čtyřrozměrná magie, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 71 (1993 – 94) nr 5, 209 – 216
- [4] Hlavatý, V.: Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, ročník LII, 1923
- [6] Urban, A.: Deskriptivní geometrie I., Praha, 1965
- [7] Sekanina, M., Boček, L., Kočandrlle, M., Šedivý, J.: Geometrie II., Praha, 1988
- [8] Jukl, M.: Analytická geometrie lineárních útvarů, skriptum UP, Olomouc, 2003
- [9] Machala, F., Slezák, V.: Geometrie grup kolineací, skriptum UP, Olomouc, 2001

http://hajtmr.3web.cz/index.php?id_page=20

<http://www.ms.mff.cuni.cz/~olsij4am/big/ia9.html>

<http://www.math.union.edu/%7Edpvc/math/4D/welcome.html>

<http://io.uwinnipeg.ca/~vincent/4500.6-001/Cosmology/dimensionality.htm>

<http://www.mathematische-basteleien.de/hypercube.htm>

<http://home.rochester.rr.com/jbxroads/4cube.html>

<http://kbs.cs.tu-berlin.de/~jutta/swd/hyper-game.html>

<http://www.case.edu/artsci/engl/VSALM/mod/ricca/index.html>

<http://tetraspace.alkaline.org/forum/viewtopic.php?t=428&start=0&postdays=0&postorder=asc&highlight=&sid=d62fe369f3396567cb4938470193952c>